DE
INFINITORVM
SPIRALIVM
SPATIORVM MENSVRA.

Digitized by Google

DE INFINITORVM SPIRALIVM SPATIORVM MENSVRA,

OPVSCVLVM GEOMETRICVM.

AVTHORE

F. STEPHANO DE ANGELIS

VENETO,

Ordinis Ieſuatorum S. HIERONYMI, in Veneta Prouincia Definitore Prouinciali.

Biblioth. Scholar. Piar. S. Pantal.ni



VENETIIS, MDCLX.

Apud Ioannem La Noù.

SVPERIORVM PERMISSV.

Ex lib. Alph. Borelli

Eminentiſſimo & Reuerendiſſimo D.D.

GREGORIO BARBADICO

Patritio Veneto, S.R.E. Cardinali Ampliſſimo, & Bergomenſium Vigilantiſs. Antiſtiti.

FR. STEPHANVS ANGELI VENETVS Ord. Ieſuatorum S. Hieronymi in Veneta Prouincia Prouincialis Definitor.

O. F. O.

LIBELLVM *hunc de Infinitis Spiralibus tibi ſiſto Eminentiſſime Princeps, & Præſul, ampliſſimoq. nomini, àc dignitati inſcribo obſequentiſſimus. Palleſceret ſanè coram tui preclariſſima Purpura, quæ Maieſtate, & Virtute vernat ardenter, vilitas ingenij, & tenuitas muneris, niſi aliundè, & tui leniſſima vrbanitas, & mei deuinctiſſima deuotio, concepta iam vota enixè firmarent. Spirales iſtæ lineæ, non aliundè quam*

ab.

ab. E. T. ſpiritum ſumerent , qui verè Geometrarum Mecenas peritiſſimus ad te colendum allicis quoſcumque eiuſdem generis ſeduliores profectus. Nec inanis, & futilis labor, quem complent ſpirales lineæ. Namquè circà vnicam earum ſpeciem Archimedis ingenium fuiſſe aliquando verſatum iactant prò ſummo pretio; quidni ſi E. T. tractationem dè Infinitis libare decerno? Profectò, à tui meritorum celſitudine decet vt hę lineæ punctum ducant, & in ipſam deſinant, titulis luculentiſſimis protrahantur, patrocinio, ac tutela firmiſſima circumuallentur. Ex hinc, poſito Inuidiæ obice, illo ſaltem gloriabuntur fato, quod E. T. Nomen ipſis circumliget gloriosè verticem, adeò vt ſi Cerua quondam Cęſaris circà collum explicans idioma venantium iacula euadebat illæſa; latrantium murmura & iſtæ paginæ ſpernent, exprimentes, quibus imprimuntur notis tutiſſimum ſibi ipſis deditum prǫſidium. Ergò opella hęc glorioſior cæteris prodeat, iam publicis plauſibus excipienda, quia E. T. inſignibus, & ſtemmatibus ditata, ſi vel ipſius Famæ potiſſima prǫconia non lucretur, nihil ſe fuiſſe adeptam arbitratur. Nobiliſſimæ ſobolis auitis laudibus, de te vnicè, & optimè ſuperbientibus, attramenta hęc decorè linire vanum duco. Vnum namq. illud ſufficiat, in E. T. ſpecimen domeſticas trabeas, infulas, & prętextas conſpiraſſe vniuerſas, quò electiori tandem vt par erat, ornatiſſimè amicireris palludamento. Purpura, qua nunc primùm indueris, (licèt ipſa longè ante digniſſimus,) carbaſa iam dat ventis, vt nuperus Iaſon ad vellus aureum ſpeciosè conquirendum, ſcilicet ad ſupremi honoris faſtigia, cordibus cunctis auras tranquillas halantibus poſtremò proſperè appellas. Cæterum mea Ma-

theſis,

theſis, quæ E. T. litandas ſpirales lineas elucubrauit, ad poſtremum vſquè ſpiritum ſemper lineas deuotionis dicaturam pollicetur. Jtà quod Apellis æmulatrix nulla ſit dies, quæ in humillimæ obſeruantiæ titulum non ſignet lineam. Valeas Eminentiſſime Princeps, & optime Antiſtes, ac fęlix viuas. Aſtra te diutius pietatis, & Virtutis tueantur ſeruatorem incolumen.

Scribebam Venetijs Kal. Julij Anno 1660.

L E

LECTORI BENEVOLO.

EN Tibi, Amice Lector, Opuſculum Geometricum, *DE INFINITORVM SPIRALIVM SPATIORVM MENSVRA*, non ſemel, aut bis, ſed pluribus, ac iteratis vicibus pollicitum. Spirales, Helices, Implexæ, ſeu Volutæ lineæ de genere illorum ſunt cenſendæ, quæ mirabilia, ſeu portenta geometrica iure merito ſunt nuncupanda. Siquidem (vt concinnè Dauid Riualtus Archimedis Commentator pronunciat.) *Admiſſa Helica, & rite vt ars ipſius fert fabrefacta, nihil eſt in tota geometria abſtruſum, & adhuc inuium, quod non denudetur, patefiat, & aperiatur.* Aſt ſi ad ingens in rebus Geometricis Spiralis lineæ momentum corroborandum cætera deeſſent teſtimonia, vnicum me hercle ſuffi-

cere

cere arbitrandum: maximum ſcilicet Archimedis ingenium circa eas aliquando fuiſſe verſatum; de ipſiſque iuſtum volumen edidiſſe, in quo naturas, ac proprietates earundem ita expendit, vt ſint poſteris vſui maximo, & veluti cerebri ingenioſi portenta ſummæ admirationi. Cæterùm haud vnicus Archimedes extitit indagator ſpiralium proprietatum: ſed ipſi ſe adiunxere quamplures, inter quos mirificè enitent Monarchiæ Geometricæ duo ſplendidiſſimi proceres, Pappus Alexandrinus lib. 4. collecti. Mathemat. & Franciſcus Vieta lib. 8. reſponſorum Mathematicorum. Paulus Guldinus Sancto-Gallenſis, ille celeberrimus Geometra ſapientiſſimæ Societatis Ieſù, & Centrobaryccæ auctor famoſus (at Caualenianorum indiuiſibilium contemptor, & irriſor, qui dum indiuiſibilia ſpreuit, ipſiſque irriſit, ſe ipſum ridiculum præbuit) altius omnibus volatum ſumpſit, conatuſque eſt ipſam ſpiralem lineam ad menſuram determinatam redigere, atque ipſius centrum grauitatis aſſignare: at conatu irrito, & Icari fine, vt ipſemet in lib. 2. Centrobaryccæ cap. 2. & infra fatetur, & prolixè explanat in capit. 3. Pronuper Iſmael Bullialdus, vt lucem afferret ijs, quæ Archimedes de ſpiralibus conſcripſit, totam rem ſpiralicam iterum proprio Marte compoſuit, & publici iuris fecit Pariſijs anno 1657.

Sed inter cæteros ſpiralium proprietatum venatores extitere etiam duo illa maxima Geometrarum

b Italorum

Italorum fulgentia luminaria, nimirum Bonauentura Caualerius, & Euangeliſta Torricellius. Hic quidem incidenter in lib. de dimenſ. parabolæ propoſit. 17. vt ex proportione circuli ad ſpatium ſpirale ab Archimede olim tradita, quadraturam ipſius ordinariæ parabolæ adinueniret. Ille verò ex inſtituto in lib. 6. Geomet. Indiuiſib. vt ex analogia ab ipſo animaduerſa inter ſpirale ſpatium, & parabolam verſante, ex menſura ipſius parabolæ prius tentata, omnia ſymptomata circa ſpiralium ſpatiorum menſuram denuò medijs ab alijs intentatis, nec aliquando excogitatis, patefaceret.

Verum enim vero omnes ſuperius recenſit geometræ, & plures, pluresque alij ſpeciatim haud nominati, qui ſpiralibus incubuere aliquando, vnicam ipſarum ſpeciem amplexati fuere: eam nimirum quæ antiquitùs ab Archimede ipſomet, & Conone agnita fuit: quamque nos in poſterum linearem vocitabimus. Cæterum infinitas ſpiralium ſpecies (quod ſciamus) nemo ante nos mundo publicauit. Non ergo putamus rem tibi ingratam fore futuram, Benigne Lector, quæ circa infinitas ſpecies ſpiralium linearum aliquando excogitauimus, communicare. Sed ante omnia cauſæ ſpeculationis huiuſce accipe hiſtoriam.

Vndecim ab hinc annis circiter dum Romæ degeremus, & dum inter geometricos Tyrones enumeraremur, iucundiſſimum exiſtimabatur à

nobis

nobis quotieſcumque datum fuiſſet ſuauiſſima conſuetudine, ac excellentiſſima doctrina perfrui trium ſummorum virorum, à quibus nunquam abſque lucro diſcedebamus. Erant hi Michael Angelus Riccius Geometrarum Italorum Coryphæus, & poſt Caualerij, ac Torricellij fatum, geometricæ maieſtatis italicæ præſidium præcipuum: Renatus Franciſcus Sluſius Leodienſis ingeniorum Phænix, & maximum humanæ intelligentiæ portentum: & Ricardus Albius Anglus pietate, ſanguine, & eruditione nobiliſſimus, atque ſuo Hemiſphærio diſſecto clariſſimus. Accidit ergo die quadam, de more cum præfato Riccio de rebus geometricis verba habentes, vt mutui diſcurſus ſubiectum ipſæ eſſent infinitæ parabolæ, & caualeriana indiuiſibilium geometria: cumque ad ſextum illius librum deuentum eſſet incidenter, audiuimus Riccium aſſerentem, ad ſimilitudinem Caualerij, infinitas ſpirales poſſe menſurari, cui negotio ſedulo incumbere ab ipſo etiam fuimus ſollicitati. Aſt tunc temporis nimis imbecilles, ac tenues in nobis erant geometricæ vires. Tyrocinium etenim percurrebamus, & lacte dumtaxat enutriebamur; vixque dabatur ea poſſe percipere, quæ Caualerius molitus fuerat; tantum aberat, vt ipſum imitari liceret, tamque in altum conſcendere. Quapropter euenit, vt labore perterriti, ſtatim infinitæ è mente ſpirales exierint. Verùm anno 1658. poſt libelli noſtri ſexaginta problematum geometricorum impreſſionem, fato accidit, vt Venetijs in Biblio-

b 2 teca

tèca Mineruæ commorantes, ad noſtras peruenerit manus opus verè aureum Andreæ Tacquet Mathematici Excellentiſſimi, ac ſolertiſſimi Fulgentiſſimæ Societatis Ieſù, *Cylindrica, & Annularia nuncupatum*. Quod reuoluentes, citius dicto incidimus in ſcholium prop. 12. lib. 1: in quo vocatus à nemine, vltrò ſeipſum conſtituit ſpectabiliſſime indiuiſibilium methodi iudicem; contraque ipſam non minus inclementem, quam iniuſtam ſequentem profert ſententiam. *Methodum demonſtrandi per indiuiſibilia, vel (vt ego appellare ſoleo) per heterogenea, quam nobilis geometra Bonauentura Caualerius in lucem protulit, pro legitima, ac geometrica admittendam non exiſtimo, &c.* (Sed quicquid autumet ipſe, pro indiuiſibilibus eſt veritas ipſamet, ſtantque illi omnes præclariſſimi geometræ, quos in epiſtola ad lectorem operis noſtri de Infinitis Parabolis recenſuimus: quibus nuperrime vltrò ſe aſſociauit Vincentius Viuiani in lib. 1. de Maximis, & Minimis monito poſt propoſit. 17. vbi ait. *Vt hoc loco, ex aduerſo indirectæ antiquorum viæ per duplicem poſitionem, luce clarius pateat quantum facilitatis, breuitatis, atque euidentiæ naſciſcatur è noua, directaque methodo (rectè tamen, cautèque vſurpata) acutiſsimi Geometræ Caualerij, per indiuiſibilium doctrinam nobis amiciſſimam &c.*) Illicò Tacquet exemplar pecunia proprium fecimus; ac diligentiſſimè ipſi ſtuduimus; doctrinaſque nouas, & peregrinas in ipſo comprehenſas ſemper admirati fuimus. Sed animaduertimus mancum ipſum extitiſſe, quia Caualerianis indiuiſibilibus

bilibus aduerſabatur, veluti fusè explicauimus in ſchol. vltimo lib. 2. de Infinit. parab. Hæc igitur vnica, & genuina cauſa impullit nos quædam rimari, in quibus Tacquet videbatur deficere. Cumque geometrica inuenta facillime prodeant ex alijs prius animaduerſis: agerque geometricus adeo ſit fertilis, vt copioſiſſimos fructus illis reddat, qui mentis ligone ipſum effodiunt: hinc ortum duxit, vt ea omnia colligeremus, quæ in dictis libris de Infinit. parab euulgauimus: & paulo poſt breui temporis interſtitio, quę in noſtris Miſcellaneis Hyppcrbolico, & Parabolico, ac in Geometrico publicauimus. Porrò dum res ad infinitas parabolas attinentes pertractaremus, hæque nobis iam ſat familiares apparerent, denuo infinitæ ſperales in mentem deuenere: atque maturè diſcuſſa, & penſitata analogia à Caualerio agnita inter ſpiralem archimedeam, & parabolam quadraticam; videbatur nobis ipſam ad infinitas ſpirales, & infinitas parabolas non multo labore extendi poſſe. Et quidem determinatè ſtatueramus ab initio opuſculum de infinitis ſpiralibus pro quinto ſubnectere quatuor libris de infinitis parabolis: & hac de cauſa dumtaxat concinnauimus in lib. 1. propoſitiones 23. & 24. lemmaticas pro ſpiralibus, & nullis in dictis libris ordinatis inſeruientes. Sed varijs de cauſis coacti fuimus illud opus citiſſimè abſoluere, ac tam impolitum, vt apparet, publici iuris facere, & opuſculum de infinitis ſpiralibus ad hoc vſque tempus reſeruare. Hæc ergo, Benigne Lector, vera eſt,

&vni-

& vnica inuentorum noſtrorum hiſtoria: quam candide tibi tradidimus, vt nullus laude defraudetur emerita. De infinitis namque ſpiralibus neſcimus quempiam verba feciſſe. Sed prima ad hæc rimanda incitamenta à nobiliſſimo Geometra Riccio habuimus. An verò infinitæ ſpirales, quas in poſterum ſumus explicaturi illæ ſint eædem, quas Riccius in votis olim habebat, penitus ignoramus. Aſt quomodocunque ſit, ſequentia omnia proprio Marte compillauimus; & diſtincius quam licuit Tibi communicare conati fuimus, vt à ſimili labore ſubleueris. Sequentia percurre. Alia, fauente Deo, is ſuccedent. Vale.

Noi

Digitized by Google

Noi Reformatori dello Studio di Padoa.

HAuendo oſſeruato per fede del P. Inquiſit. non eſſerui nel Libro intitolato De Infinitorum Spiralium Spatiorum del P. F. Steffano de Angelis coſa contro la Santa Fede, e parimente per atteſtato dal Segretario noſtro niente contro Prencipi, ò buoni coſtumi, concedemo licenza, che poſſi eſſere ſtampato, douendo oſſeruarſi gl'ordini, & eſſerne preſentate due copie per le preſente Librarie di Padoa, e di queſta Città,

Dat. dal Magiſt. noſtro li 27. Agoſto 1660.

{ Zuanne Donado Ref.
Nicolo Capello Ref.

Alemante Angelo Donini Segr.

Facul-

Digitized by Google

Facultas Reuerendiſsimi Patris Generalis.

Laudetur Ieſus Chriſtus.

OPus inſcriptum, *De Infinitorum Spiralium Spatiorum Menſura*; compoſitum ab Admodum R. P. Stephano de Angelis Veneto Profeſſo Noſtri Ordinis Ieſuatorum, ac in Prouincia Veneta Definitore, concedimus Typis demandari, dummodo habeat neceſſarias licentias, & approbationes, quæ de iure ſunt neceſſariæ &c. In quorum fidem præſentes manu propria ſubſcripſimus, ac proprio Noſtri Officij ſigillo muniuimus.

Datum Brixiæ in Noſtro Monaſterio Corporis Chriſti, die 28. Iunij 1660.

Fr. Antonius Nouellus Gen. Ieſuat.

DE

DE INFINITORVM SPIRALIVM SPATIORVM MENSVRA,

OPVSCVLVM GEOMETRICVM.

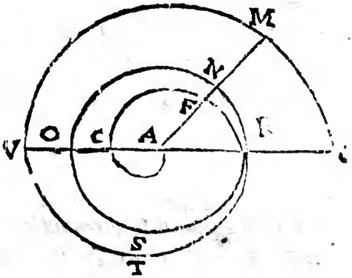
ARchimedes Geometrarum facile Princeps in aureo illo libello, quem de ſpiralibus, ſeu Helicibus conſcripſit, ante cætera, naturam ipſarum luculenter explanat, definiens. Spiralem lineam fore illam nuncupandam, quæ à duplici motu æquabili, èodemque peracto tempore ortum ducit: nimirum, ſemidiametri dati circuli circa centrum immotum: & centri interim ſemidiametrum ipſam permeantis. Ità etenim loquitur. *Si recta linea in plano, altero eius termino quieſcente circumferatur, donec ad locum redierit vnde primo cæpit moueri, & ſimul cum hac circumducta linea punctum feratur & ipſum ſibi*

ipſi æquali ſemper velocitate moueatur ſecundum ipſam lineam motam, incipiatque à termino lineæ quieſcente verſus alterum ſeri punctum, huiuſmodi ſpiralem lineam in plano deſcribet. Vt e. g. in ſchem. ſeq. conſideremus ſemidiametrum A R, immoto puncto A, ciari æquabiliter, adeo vt deſcribat circulum R S O N R, interim verò etiam punctum A, moueatur æquabiliter per A R, adeo vt eodem tempore punctum R, deſcribat peripheriam R S O R, punctum verò A, perueniat ad R. Lineam curuam A C F R, ortam ex duplici hoc motu æquabili appellat Archimedes lineam ſpiralem primæ reuolutionis. Sicuti ſpatium A C R A, contentum linea curua prædicta, & recta A R, vocat primum ſpatium. Circulum cuius ſemidiameter AR, circumſcriptum dicto ſpatio, primum circulum. Punctum A, principium lineæ ſpiralis. Poſitionem lineæ A R, à qua incepit circulatio, principium circulationis. Si autem radius A R, intelligatur duplicatus in R G, vel triplicatus &c. & motus continuetur vt prius: appellat Archimedes ſpirales ſecundæ circulationis; tertiæ; &c. idem dicit de ſpatijs, & circulis. Sed hæc omnia locupletiùs percipientur ipſomet Archimede inſpecto, ſicuti & noſtra ſequentia: namque nos in ſequentibus omnes Archimedis terminos paſſim vſurpabimus.

At nos vniuerſalius ſupponimus generari ſpirales. Supponimus enim cum Archimede generari vtique ex duplici motu eorundem mobilium: quorum ille, qui fit à centro permeante ſemidiametrum,

fit

ſit ſemper æquabilis; aſt ille, qui fit à ſemidiametro fixa in centro, ſit vel æquabilis, vel variè acceleratus. Si ergo moto æquabiliter A, per AR, etiam AR, fixa in A, æquabiliter gyretur per circumferentiam RSOR: linea ACFR, genita ex duplici tali motu, vocatur à nobis prima ſpiralis, ſeù linearis, quæ eſt Archimedea. Si verò puncto A, æquabiliter moto per AR, interim AR, moueatur motu taliter accelerato, vt ſpatia RS, RSO, &c. peracta, ſint vt quadrata temporum in quibus peraguntur: linea ACR, vocetur ſecunda ſpiralis, ſeu quadratica. Si verò AR, moueatur motu taliter accelerato, vt ſpatia RS, RSO, ſint vt cubi temporum: Illa linea dicetur tertia ſpiralis, ſeù cubica. Et ſic in infinitum, ſecundum quod ſpatia peracta ſunt ad inuicem, vt altiores temporum, in quibus peraguntur, poteſtates.



Si vero ſemidiametro AR, producta in G, adeo vt poteſtas GA, eiuſdem gradus cum ſpirali ſit dupla ſimilis poteſtatis AR. v.g. in ſpirali lineari, ſit GA, dupla AR: in quadratica ſit quadratum GA, duplum quadrati AR: in cubica cubus ſit duplus

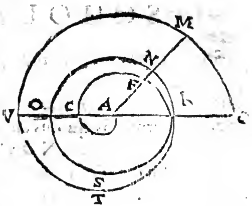
cubi, &c. & intelligamus continuari motus priores, ſecundum quod explicatum fuit ſupra ex Archimede in ſpirali ſecundæ reuolutionis : lineæ genitæ, ſpatia, circuli, &c. dicendi ſunt ſecundæ reuolutionis, &c. Idem dicendum ſi poteſtas AR, eiuſdem gradus cum ſpirali intelligeretur triplata, quadruplata, &c. Spirales etenim, ſpatia, &c. dicerentur tertiæ reuolutionis, quartæ, &c. Hæc omnia nullo negotio percipientur à viris Archimedeis : ipſum enim & nunc, & in ſequentibus imitabimur.

PROPOSITIO I.

Si in quamcunque infinitarum ſpiralium, ortam ex prima reuolutione, ab initio ipſius incidant duæ lineæ, quę producantur vſque ad circumferentiam primi circuli. Arcus circuli in pręcedentia contenti inter initium circulationis, & ductas lineas, erunt ad inuicem, vt poteſtates incidentium in ſpiralem eiuſdem gradus cum ſpirali.

ESto quælibet ex infinitis ſpiralibus ACFR, orta ex prima reuolutione, & eſto primus circulus RSOR, & in ſpiralem incidant ab initio A, duæ rectæ AC, AF, quæ occurrant circumferentiæ in O, & N. Dico circumferentiam RSO, eſſe ad circumferentiam RSON, vt poteſtas AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem AF. V.g. in prima ſpirali, ſeu lineari, vt AC, ad AF. In ſec. hoc eſt quadratica, vt quadratum AC, ad quadratum

dratum AF. In cubica, vt cubus AC, ad cubum AF. Et ſic in infinitum. Præſens propoſitio parùm diuersè oſtendetur à modo, quo demonſtratur ab Archimede in lineari in propoſit. 14. Quoniam enim AC, eſt ad AF, vt tempus motus per AC, puncti A, ad tempus motus eiuſdem puncti A, per AF (quia motus puncti A, ſupponitur æquabilis): ergo & vt quælibet poteſtas AC, ad homogeneam poteſtatem AF, ſic ſimilis poteſtas temporis motus A, per AC, ad ſimilem poteſtatem temporis motus A, per AF. Sed vt poteſtas temporis eiuſdem gradus cum ſpirali motus A, per AC, ad ſimilem poteſtatem motus per AF, ſic ex hypotheſi, arcus RSO, ad arcum RSON. Ergo & arcus ad arcum erit, vt poteſtas AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem AF. Quod &c.



COROLLARIVM.

Ergo conuertendo, & diuidendo, erit arcus NO, ad arcum OSR, vt exceſſus poteſtatis AF, eiuſdem

gradus

gradus cum ſpirali ſupra ſimilem poteſtatem A C, ad ſimilem poteſtatem A C.

SCHOLIVM.

Sed cum, vt poteſtas F A, eiuſdem gradus cum ſpirali ad ſimilem poteſtatem C A, ſic F A, ad vltimum terminum proportionis FA, ad CA, continuatæ ad tot terminos quotus eſt numerus ſpiralis vnitate maior: erit & arcus N O S R, ad arcum O S R, vt F A, ad hunc vltimam proportionalem. Nempe in lineari vt F A, ad C A. In quadratica, vt F A, ad tertiam proportionalem minorem ipſarum F A, C A. In cubica ad quartam: Et ſic in infinitum. Et diuidendo, erit N O, ad O S R, vt exceſſus F A, ſupra vltimam minorem proportionalem ad ipſam.

PROPOSITIO II.

Si in quamcunque infinitarum ſpiralium ex alijs reuolutionibus genitam, & in ſibi circumſcriptum circulum incidant duæ lineæ, vt prius. Poteſtates incidentium in ſpiralem eiuſdem gradus cum ſpirali erunt ad inuicem, vt arcus prædicti, vna cum tot integris peripherijs, quotus eſt numerus reuolutionum vnitate minor.

SEd poteſtate ſemidiametri A R, congruente ſpirali, duplata, triplata, &c. in G, vt explicatum fuit ſupra, intelligamus continuatis motibus, ſpiralem

ralem A C F R, continuatam fore in T V M G, &c. cui A C, A F, incidant in V, M. Dico in prima ſpirali, eſſe A M, ad A V, vt tota circumferentia circuli R S O R, tot vicibus accepra, quotus eſt numerus reuolutionum vnitate minor, vna cum arcu N O S R, ad eundem numerum totius circumferentiæ R S O R, vna cum arcu R S O. In ſecunda, ſic eſſe quadratum A M, ad quadratum A V. In tertia, ſic cubum ad cubum. Et ſic in infinitum. Diximus autem A M, A V, eſſe in prædictis rationibus cum circumferentijs circuli cuius ſemidiameter A R, quia iſti arcus ſunt in eadem ratione cum ſimilibus arcubus circuli cuius ſemidiameter A G, ad cuius peripheriam intelligendæ ſunt extenſæ A V, A M; quia ſunt concentrici.

Hæc propoſit. oſtendetur ad modum ſuperioris, & ad modum Archimedis in propoſit. 15.

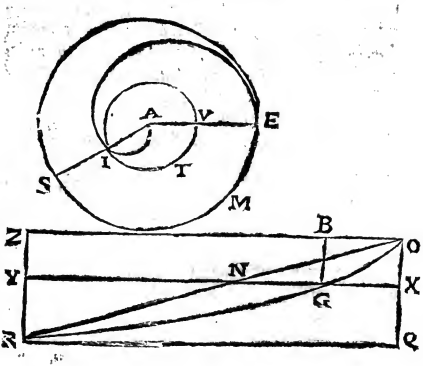
COROLLARIVM.

Ergo conuertendo, & diuidendo, erit exceſſus poteſtatis A M, eiuſdem gradus cum ſpirali ſupra ſimilem poteſtatem A V, ad poteſtatem A V, vt arcus N O, ad arcum O S R, vna cum tot integris peripherijs R S O R, quotus eſt numerus reuolutionum vnitate minor.

PROPOSITIO III.

Si à ſemidiametro primi circuli circumſcripti ſpatio ſpirali abſcindatur quælibet linea, & centro initio, ſemidiametro abſciſſa deſcribatur circuli peripheria. Erit tota circumferentia primi circuli, ad peripheriam deſcripti circuli contentam inter lineam initium reuolutionis, & ſpiralem, in præcedentia, vt poteſtas radij primi circuli vno gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem abſciſſæ.

IN ſchem. ſeq. abſciſſa AV, ab AE, ſemidiametro primi circuli circumſcripti primo ſpatio cuiuſcunque ſpatij ſpiralis AIEA, centro A, interuallo AV, deſcribatur circulus VTIV. Dico totam circumferentiam EMSE, eſſe ad circumferentiam VTI, vt poteſtas EA, vno gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem AV. V.g. in lineari, vt quadratum ad quadratum. In quadratica, vt cubus ad cubum. Et ſic in infinitum. Namque, ratio circumferentiæ EMSE, ad VTI, componitur ex ratione ipſius ad totam circumferentiam VTIV, & huius ad VTI, (nempe circumferentiæ EMSE, ad EMS.) Sed vt EMSE, circumferentia ad totam VTIV, ſic EA, ad AV; & vt eadem EMSE, ad EMS, ſic ex propoſit. pri. poteſtas EA, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem AI, ſeu AV. Ergo & ratio circumferentiæ ad circumferentiam componetur ex his duabus



duabus rationibus: nempe circumferentia ad circumferentiam erit, vt poteſtas EA, vno gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem AV. Quod &c.

PROPOSITIO IV.

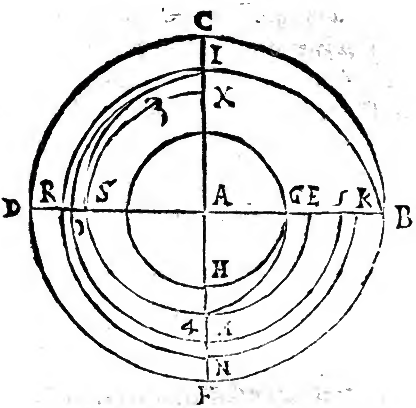
Si in exceſſu ſemidiametri circuli circumſcripti cuilibet ſpatio Helico à primo, ſupra ſemidiametrum circuli vnitate minoris, ſumatur punctum; & centro initio, interuallo aſſumpto puncto, deſcribatur circuli peripheria. Erit to-

B ta

ta circumferentia maioris circuli, ad portionem circumferentiæ deſcriptæ, contentam inter ſpiralem, & lineam initium reuolutionis, vt factum ſub ſemidiametro circuli maioris, in exceſſum poteſtatis ipſius eiuſdem gradus cum ſpirali, ſupra ſimilem poteſtatem minoris circuli, ad factum ſub ſemidiametro deſcriptæ circumferentiæ, & ſub exceſſu poteſtatis ipſius eiuſdem gradus cum ſpirali, ſupra ſimilem poteſtatem ſemidiametri circuli minoris.

IN ſchem. ſeq. ſupponamus GMSIBG, eſſe quodcunque ſpatium cuiuſcunque ſpiralis à primo, nimirum vel ſecundum, vel tertium, vel quartum, &c. & circulus radij AB, ſit circulus eiuſdem numeri ſpatio circumſcriptus, vt circulus radij AG, ſit ipſo vnitate minor: nimirum ſi ipſe ſit ſecundus, ſit circulus radij AG, primus: ſi tertius, ſecundus: &c. & inter GB, accepto puncto E, intelligatur circulus radij AE. Dico peripheriam radij AB, eſſe ad peripheriam EM, contentam inter AB, & ſpiralem in M, vt factum ſub BA, in exceſſum poteſtatis BA, eiuſdem gradus cum ſpirali, ſupra ſimilem poteſtatem AG, ad factum ſub EA, in exceſſum poteſtatis ipſius eiuſdem cum ſpirali gradus, ſupra ſimilem poteſtatem AG. V. g. in prima ſpirali, vt rectangulum ABG, ad rectangulum AEG. In ſec. vt factum ſub AB, in differentiam quadratorum AB, AG, ad factum ſub AE, in exceſſum quadrati ipſius ſupra quadratum AG. Et ſic in infinitum in altioribus ſpiralibus.

Ratio



Ratio enim circumferentiæ radij A B, ad circumferentiam E M, de foris ſumpta circumferentia radij A E, componitur ex ratione ipſius ad circumferentiam radij A E, & huius ad circumferentiam E M. Sed vt circumferentia radij A B, ad circumferentiam radij A E, ſic radius A B, ad radium A E: & vt circumferentia radij A E, ad arcum E M, ſic circumferentia radij A B, ad arcum B F. Quare ratio circumferentiæ radij A B, ad arcum E M, componetur ex rationibus A B, ad A E, & circumferentiæ radij A B, ad arcum B F. Verum, quoniam ex propoſit. ſecund. eſt vt circumferentia radij A B, tot vicibus accepta quotus eſt numerus ſpatij, ad eandem acceptam ſecundum numerum vnitate

minorem, ſimul cum arcu BF, ſic potèſtas BA, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem AM, ſeù AE: ergo & vt vnica peripheria radij AB, ad arcum ſolum BF, ſic exceſſus poteſtatis AB, eiuſdem gradus cum ſpirali, ſupra ſimilem poteſtatem AG, ad exceſſum poteſtatis AE, itidem eiuſdem gradus cum ſpirali, ſupra ſimilem poteſtatem AG (ex geneſi enim ſpiralium, poteſtatis AB, eiuſdem gradus cum ſpirali, poteſtas AG, continet tot partes, quotus eſt numerus ſpatij vnitate minor, & differentia poteſtatum, vnicam.) Ergo ratio peripheriæ radij AB, ad arcum EM, componetur quoque ex ratione AB, ad AE, & ex ratione exceſſus poteſtatis AB, eiuſdem gradus cum ſpirali, ſupra ſimilem poteſtatem AG, ad exceſſum ſimilis poteſtatis AE, ſupra eandem poteſtatem AG. Nempe erit ad ipſum, vt factum ſub AB, in priorem exceſſum, ad factum ſub AE, in poſteriorem exceſſum. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

Quæ ſint infinita trilinea parabolica explicatum fuit initio primi libri eorum, quos de infinitis parabolis euulgauimus. Diximus enim ibidem, nos pro talibus trilineis intelligere ſpatia, quæ ſunt exceſſus parallelogrammi circumſcripti infinitis ſemiparabolis ſupra ipſas. De infinitis trilineis in propoſit. 23. & 24. eiuſdem libri oſtendimus duas proprieta-

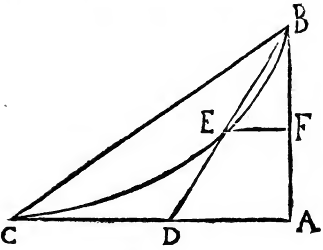
tes, quæ, quoniam ſtatueramus ab initio cum opere de infinitis parabolis edere etiam hoc opuſculum de infinitis ſpiralibus, in harum gratiam explicatæ fuere. Verum, quoniam multa nos coegerunt abſoluere quamprimum opus illud, citatæ propoſitiones tunc temporis proprium finem haud fuerunt conſecutæ. Cum autem ſint in præſentiarum neceſſariæ, determinauimus, vt cuilibet ſint in promptu, ipſas ex citato opere tranſcribere; ſed nunc vigeſimamtertiam, infra ſuo loco, vigeſimamquartam. Sit ergo.

PROPOSITIO V.

Si à vertice cuiuſcunque trilinei à primo ducatur linea in baſim ſecans curuam parabolicam: & per punctum vbi ſecat curuam ducatur vſque ad diametrum parallela baſi. Erit baſis trilinei ad ſui partem interceptam inter ductam, & diametrum, vt poteſtas diametri trilinei vno gradu inferior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem diametri trilinei ad verticem.

SIt quodlibet trilineum à primo (nempe primo excepto, quod eſt triangulum) CBA, cuius vertex B, diameter BA, & à vertice B, ducatur BD, in baſim ſecans curuam in E & per E, ducatur EF, parallela CA. Dico CA, eſſe ad AD, vt poteſtas AB, vno gradu inferior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem BF. V.g. in trilineo quadratico, erit CA, ad AD, vt AB, ad BF. In cubico, vt

quadra-



quadratum AB, ad quadratum BF. In quadrato-quadratico, vt cubus AB, ad cubum BF. Et ſic in infinitum. Quoniam enim proportio CA, ad AD, componitur ex propoſitione CA, ad EF, & huius ad DA: ex geneſi autem parabolarum, eſt vt CA, ad EF, ſic poteſtas AB, eiuſdem gradus cum trilineo, ad ſimilem poteſtatem BF: & vt EF, ad DA, ſic BF, ad BA. Ergo ratio CA, ad AD, componetur ex rationibus poteſtatis AB, eiuſdem gradus cum trilineo ad ſimilem poteſtatem BF, & ex ratione BF, ad BA. Sed ex iſtis duabus rationibus componitur ratio poteſtatis AB, vno gradu inferioris poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem BF. Ergo patet propoſitum.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Exceſſus primi circuli ſupra quodlibet ſpirale ſpatium ex prima reuolutione, eſt æqualis trilineo parabolico vno gradu altiori ſpatio ſpirali, cuius diameter ſit æqualis ſemidiametro circuli, baſis verò circumferentiæ.

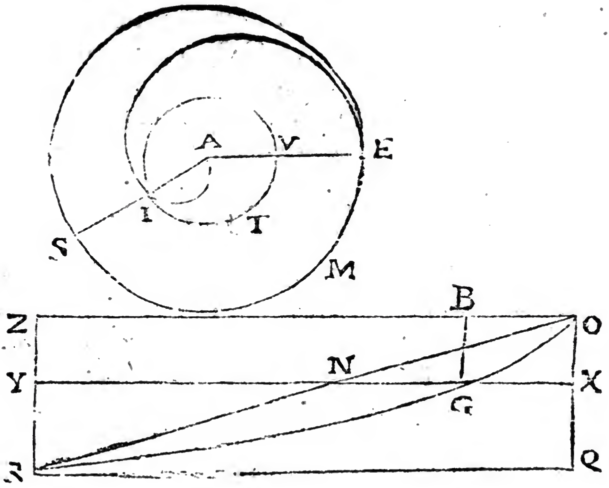
SIt quæcunque ſpiralis ex prima reuolutione AIE, AE, verò ſit linea reuolutionis initium, ſitque etiam ſemidiameter circuli primi; pariter eſto parallelogrammum rectangulum ZQ, circumſcriptum ſemiparabolæ ZOR, cuius baſis ZR, vertex O, quæ ſit gradus vnitate altioris gradu ſpiralis: v.g. ſi ſpiralis ſit linearis, parabola ſit quadratica: ſi ſpiralis ſit quadratica, parabola ſit cubica: &c. inſuper ZR, ſeu OQ, ſit æqualis ſemidiametro EA, ZO, verò, ſeu RQ, ſit æqualis circumferentiæ EMSE. Dico exceſſum circuli ſupra ſpatium ſpirale (qui deinceps breuitatis gratia vocabitur exceſſus abſolutè) æqualem eſſe RGOQ, trilineo. Accipiatur in AE, arbitrariè punctum V, & centro A, interuallo AV, deſcribatur circulus ſecans ſpiralem in I, & ducatur AIS: deinde fiat OX, æqualis AV, ſeu AI, & ducatur XGY, parallela RQ, & per G, ipſa GB, parallela RZ. Quoniam enim ex natura parabolæ explicata initio lib. pri. de infin. parab. eſt vt poteſtas RZ, ſeu OQ, congruens parabolæ ad ſimilem poteſtatem BG, ſeu OX, ſic

ZO,

ZO, ſeù RQ, ad BO, ſeù GX: & cum vt talis poteſtas QO, ad ſimilem poteſtatem OX, ſic in ſpirali ſimilis poteſtas EA, ad ſimilem poteſtatem AV (quia QO, OX, ſunt æquales ipſis EA, AV.) Ergo vt RQ, ad GX, ſic poteſtas EA, congruens parabolæ, nempe vno gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem AV, ſeù AI. Sed ex propoſit. 3. vt talis poteſtas EA, ad poteſtatem AI, ſic circumferentia EMSE, ad circumferentiam VTI. Ergo & vt RQ, ſeù YX, ad GX, ſic circumferentia EMSE, ad circumferentiam VTI. Ergo & permutando, vt XY, ad EMSE, ſic GX, ad VTI. Sed ex conſtructione, YX, ſeù RQ, eſt æqualis circumferentiæ EMSE. Ergo etiam GX, erit æqualis VTI. Cum ergo puncta V, X, ſumpta fuerint arbitrariè, ergo omnes lineæ trilinei RGOQ, parallelæ RQ, erunt æquales omnibus circumferentijs exceſſus circuli EMSE, ſupra ſpirale ſpatium; quæ circumferentiæ ſunt concentricæ ipſi EMSE. Ergo & trilineum erit æquale prædicto exceſſui. Quod &c.

SCHOLIVM.

Notetur autem, quod ſupradicta propoſitio non ſolum verificatur ſecundum totas magnitudines, ſed etiam ſecundum ipſarum partes proportionales. Nimirum, non modò totus exceſſus circuli erit æqualis toto trilineo RGOQ, ſed etiam ſi AV, OX,



ſint æquales, pars exceſſus clauſa circumferentia EMSE, ſpirali EI, circumferentia ITV, & recta EV, erit æqualis trapezio parabolico RGXQ. Idem intelligatur de alijs partibus, dummodo ſemper AE, QO, æqualiter ſecentur.

Ex hac doctrina, & ex ſchol. 1. propoſit. 3. lib. 1. de Infinit. Parab. deducemus, quod ſi centro A, interuallo AV, deſcribatur quælibet circumferentia VTI: erit totus exceſſus ad partem ſui clauſam curuis AI, ITV, & recta AV, vt poteſtas EA, duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem po-

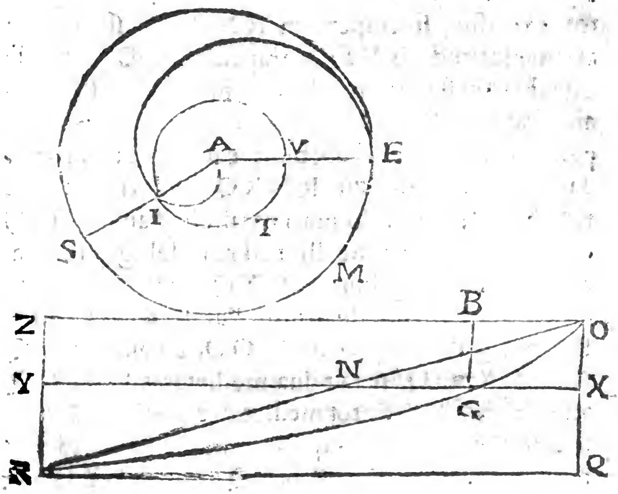
teſtatem AV. V. g. in lineari, vt cubus EA, ad cubum AV. In quadratica, vt quadratoquadratum ad quadratoquadratum, &c. Ratio eſt, quia ex citat. ſchol. trilineum RGOQ, eſt ad trilineum ad verticem GOX, in prædictis rationibus. Quæ doctrina diligenter notetur, ex ipſa enim non pauca faciliter in poſterum deducemus.

PROPOSITIO VII.

Si intra circulum circumſcriptum primo ſpatio helico ducatur circulus concentricus. Erit armilla, exceſſus primi circuli ſupra ductum, ad partem exceſſus quam comprehendit, vt tot medietates amborum radiorum circulorum, quotus eſt numerus gradus ſpiralis binario auctus, ad tot numero terminos proportionis, continuata ratione radij maioris ad minorem, quorum primus ſit radius maior.

IN eodem ſchemat. centro A, radio AV, ſit quilibet circulus concentricus ipſi EMSE, & ipſo minor, ſecans exceſſum, & ſpatium, vt in ſchemate. Dico armillam circularem cuius latitudo VE, quæ eſt differentia circulorum, eſſe ad partem exceſſus, quam continet, nempe illam, quam claudunt peripheria EMSE, ſpirali EI, circumferentia VTI, & recta VE, vt tot medietates ipſarum EA, AV, quotus eſt numerus gradus ſpiralis binario auctus, ad EA, AV, cum tot continuè proportionalibus proportionis EA, AV, continuatæ, quotus

eſt



eſt idem numerus gradus ſpiralis binario auctus. V. g. in ſpirali lineari, vt 3. medietates ipſarum EA, AV, ſeù vt EA, AV, ſeſquialteræ, ad EA, AV, cum tertia proportionali. In quadratica, vt 4. medietates EA, AV, ſeù vt ipſarum duplæ, ad EA, AV, cum duobus alijs terminis continuè proportionalibus. Et ſic in infinitum.

Trilineum parabolicum anteced. propoſit. ſit ſectum cum triangulo ſibi circumſcripto linea NGX, RQ, parallela, vt QX, æquetur EV. Patet faciliter ex propoſit. anteced. & ex eius ſchol. ſicuti to-

tum triangulum R O Q, eſt æquale toti circulo radij A E, & totum trilineum R G O Q, eſt æquale toti exceſſui, ſic trapezium R N X Q, eſſe æquale armillæ latitudinis V E; & trapezium R G X Q, eſſe æquale exceſſui ab armilla comprehenſo. Ergo armilla ad exceſſum, & trapezium triangulare ad trapezium trilineare, habebunt eandem rationem. Tunc, ratio trapezij R N X Q, ad trapezium R G X Q, (de foris ſumpto parallelogrammo Y Q) componitur ex ratione illius ad parallelogrammum, & huius ad trapezium R G X Q. Aſt ex 2. parte propoſit. 9. lib. pri. de Infinit. Parab. eſt trapezium R N X Q, ad Y Q, vt X O, O Q, ad duplam OQ: & vt O X, O Q, ſeu vt duæ medietates O X, O Q, ad duplam Q O, ſic tot medietates O X, O Q, quotus eſt numerus gradus ſpiralis binario auctus, ad tot numero Q O. Ergo R N Y Q, erit ad Y Q, vt illæ tot medietates ad tot Q O. Sed Y Q, eſt ad R G X Q, ex loc. citat. vt tot Q O, quotus eſt numerus trilinei vnitate auctus (nempe quotus eſt numerus ſpiralis binario auctus) ad Q O, O X, cum alijs terminis proportionis Q O, ad O X, continuatæ ad tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum trilinei vnitate (nempe ſpiralis binario.) Ergo ratio trapezij triangularis, ad A G X Q, componetur ex ijſdem rationibus. Sed ex ipſis componitur etiam ratio tot medietatum Q O, O X, quotus eſt numerus ſpiralis binario auctus, ad Q O, O X, cum illis tot numero terminis. Ergo etiam

trape-

trapezium ad trapezium, & conſequenter armilla latitudinis V E, erit ad partem exceſſus dictam, quam comprehendit, vt illæ tot medietates ad illas proportionales. Nempe, vt tot medietates ipſarum E A, A V, quotus eſt numerus ſpiralis binario auctus, ad E A, A V, vna cum tot alijs proportionalibus, quæ ſimul adæquent eundem numerum ſpiralis binariò auctum.

COROLLARIVM.

Ergo per conuerſionem rationis, erit armilla radij V E, ad partem ſpatij helici quam claudit, nempe ad illam, quæ clauditur recta V E, & curuis I E, I V, vt illæ medietates ad exceſſum ipſarum ſupra illas proportionales. Nempe in lineari vt ſeſquialtera E A, A V, ad exceſſum vnius medietatis E A, A V, ſupra tertiam minorem proportionalem. In quadratica, vt exceſſus E A, A V, ſupra tertiam, & quartam minores proportiones, &c.

PROPOSITIO VIII.

Circulus ductus concentricus, erit ad partem exceſſus, quam continet, vt poteſtas radij circuli maioris eiuſdem gradus cum ſpirali, ad talem partem ſimilis poteſtatis radij ducti, quæ ſe habeat ad totam, vt binarium ad numerum ſpiralis binariò auctum.

In

IN Eodem ſchemate. Dico circulum radij AV, eſſem ad AITVA, partem exceſſus quam claudit, vt poteſtas EA, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad partem ſimilis poteſtatis AV, quæ ſe habeat ad totam poteſtatem AV, vt binarium ad numerum ſpiralis binario auctum. Nempe in lineari, vt EA, ad $\frac{2}{3}$ AV. In quadratica, vt quadratum EA, ad $\frac{2}{4}$ quadrati AV. In cubica, vt cubus EA, ad $\frac{2}{5}$ cubi AV. Et ſic diſcurrendo.

Triangulum enim NOX, eſt æquale circulo radij, AV, & trilineum GOX, æquale exceſſui AITV; ergo triangulum ad trilineum, & circulus ad exceſſum erunt in eadem ratione. Sed intellecta recta GO, triangulum NOX, eſt ad triangulum GOX, vt NX, ad GX (nempe vt tota circumferentia VTIV, ad circumferentiam VTI (NX, enim, & GX, ſunt æquales illis circumferentijs:) & triangulum GOX, eſt ad trilineum GOX, ex ſchol. pri. propoſit. 1. lib. 1. de Infinit. Parab. vt numerus trilinei vnitate auctus (nempe vt numerus ſpiralis binario auctus) ad binarium, nempe, vt GX, ad talem ſui partem; ſeu vt circumferentia ITV, ad talem ſui partem. Ergo ex æquali, erit NOX, ad trilineum, & conſequenter circulus radij EA, ad partem exceſſus AITV, vt tota circumferentia radij AV, ad talem partem VTI, quæ ſe habeat ad ipſam, vt binarium ad numerum binario auctum. Sed vt circumferentia radij AV, ad dictam partem circumferentiæ VTI, ſic circumfe-

rentia

rentia radij EA, ad ſimilem partem circumferentiæ EMS: & cum ſit vt circumferentia radij AE, ad EMS, ſic poteſtas EA, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem AI, ſeù AV; vnde eſt etiam vt circumferentia radij AE, ad talem partem EMS, quæ ſe habeat ad ipſam, vt binarium ad numerum binario auctum, ſic poteſtas EA, eiuſdem gradus cum ſpirali ad talem partem ſimilis poteſtatis AV, quæ ſe habeat ad ipſam, vt binarium ad numerum ſpiralis binario auctum. Ergo à primo ad vltimum, erit circulus radij AV, ad exceſſum AITV, vt dicta poteſtas EA, ad dictam partem ſimilis poteſtatis AV. Quod erat oſtendum.

COROLLARIVM.

Per conuerſionem ergo rationis erit circulus radij AV, ad partem ſpatij, quam claudit, nempe ad AIVA, vt dicta poteſtas EA, ad exceſſum ipſius ſupra dictas partes poteſtatis ſimilis AV.

SCHOLIVM.

Vt imitaremur Caualerium in lib. 6. Geom. Indi. oſtendimus 6. propoſitionem per indiuiſibilia: verum ipſum omnimodè inſequentes, illam oſtendemus modo Archimedeo, & ipſam demonſtrabimus vniuerſalius: non modò quia agemus de infinitis ſpiralibus, cum ipſe de vnica egerit dumtaxat, ſed etiam

quia

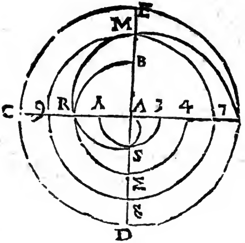
quia vniuerſaliter conſiderabimus trilinea, & non prædictis exceſſibus æqualia tantum, vt fecit Caualerius. Modus iſte oſtendendi Archimedeus non modò poteſt ſeruari in iſta propoſitione, ſed etiam in omnibus alijs ſequentibus, in quibus particulariter in ſpirali lineari ipſo vtitur Caualerius; & quidem ſemper duplici de cauſa vniuerſalius. Verum nos ipſum non adhibebimus niſi in præſenti propoſitione. In alijs etenim vtemur regali, & facili indiuiſibilium via, relinquentes illam archimedeam ijs, qui in rebus geometricis cupiunt excruciari. Verum tamen eſt, quod ſi quis optabit oſtendere illas propoſitiones Archimedeè, id ei licebit perficere, attentè conſiderata ſequenti propoſitione, & ad ipſius inſtar, ſed congruenti modo, operando, & diſcurrendo.

PROPOSITIO IX.

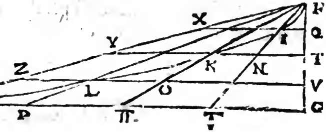
Circulus ad exceſſum ſui ſupra quodlibet ſpatium ſpirale ex prima reuolutione eam habet proportionem, quam habet triangulum circumſcriptum trilineo vno gradu altiori ſpirali, ad ipſum.

Sit quæcunque ſpiralis ex prima reuolutione ASRMB, cum ſibi circumſcripto circulo BDCE, & ſit quodlibet triangulum rectangulum cum ſibi inſcripto trilineo FGH, vno gradu altiori gradu ſpiralis, vt dictum fuit ſupra. Dico circulum dictum, eſſe ad exceſſum ipſius ſupra ſpatium

ſpirale







ſpirale ASRMBA, vt triangulum FGH, ad trilineum FGH, ſibi inſcriptum.

Si triangulum non eſt ad trilineum in eadem ratione cum circulo ad illum exceſſum, vel eſt in maiori, vel in minori. Sit primò in minori. Ergo triangulum ad aliquid minus illo trilineo erit in eadem ratione. Sit Ω, exceſſus quo trilineum ſuperat magnitudinem, ad quam triangulum eſt in eadem ratione cum circulo ad illum exceſſum. HG, baſis

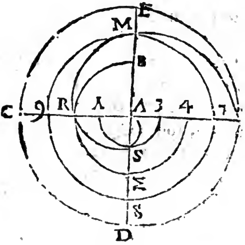
Digitized by Google

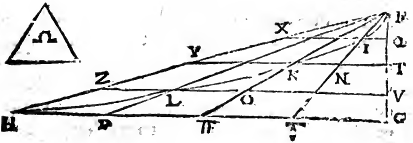
trianguli diuidatur biſariam in π, & partes rurſum biſariam in P, r, & hoc ſemper fiat, donec à vertice F, ductis Fr, Fπ, FP, tandem deueniatur ad triangulum FrG, quod ſit minus ſpatio Ω; & per puncta I, k, L, vbi ductæ à vertice F, ſecant curuam parabolicam, ducantur parallelæ ipſi HG, vt in ſchemate. Habemus ergo trilineo circumſcriptam figuram conſtantem ex triangulo FIQ, & ex trapezijs kQ, LT, HV; & alteram inſcriptam conſtantem ex trapezijs NQ, OT, PV; & exceſſus circumſcriptæ ſupra inſcriptam minor eſt ſpatio Ω: quia exceſſus prædictus (vt conſideranti patet) æquatur triangulo FrG, quod ex conſtructione, eſt æquale Ω. Ergo trilineum ſuperabit figuram ſibi inſcriptam multo minori quantitate quam ſit Ω. Ergo triangulum HFG, ad talem figuram in trilineo inſcriptam adhuc erit in minori ratione quam circulus ad exceſſum ſupra ſpatium ſpirale. Quod ſeruetur.

Tunc AB, diuidatur ſimiliter in 3, 4, 7, ſicuti diuiſa eſt FG, in Q, T, V: & centro A, interuallis A3, A4, A7, deſcribantur circumferentiæ 3S, 4ΣR, 789M, ſecantes ſpiralem in S, R, M, per quæ tranſeant ASD, ARC, AME, productæ ad circumferentiam vſque.

Quoniam ergo circumferentia BDCEB, ad circumferentiam 789M, eſt ex propoſit. 3. vt poteſtas BA, vno gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem A7; & AB, GF, ſectæ ſunt pro-

por-





portionaliter in 7, V; vndè eſt vt poteſtas B A, vno gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem A 7, ſic ſimilis poteſtas G F, ad ſimilem poteſtatem F V; ergo & circumferentia B D C E B, erit ad circumferentia 7 8 9 M, vt poteſtas G F, vno gradu altior poteſtate ſpiralis (nempe eiuſdem gradus cum trilineo, quod ſupponitur vno gradu altius ſpirali) ad ſimilem poteſtatem F V. Sed ex natura trilinei, eſt vt prædicta poteſtas G F, ad poteſtatem F V,

ſic HG, ad LV. Ergo & vt HG, ad LV, ſic circumferentia BDCEB, ad circumferentiam 789M. Eodem modo probabimus, circumferentiam BDCEB, eſſe ad circumferentias 4 ᶻR, 3 S, vt HG, ad K Γ, LQ; idemque probabimus de alijs circumferentijs inſcriptis in exceſſu, ſi adeſſent. Cum ergo 34, ſit proportionalis ipſi QΓ; circumferentia 3 S, ipſi IQ; & circumferentia 4 ᶻ, ipſi NT: Ergo faſcia circularis 3 S ᶻ 4, erit proportionalis trapezio NQ, ex luculenter explicatis in propoſit. 7. lib. 2. de infinit. parab. & in ſcholijs eiuſdem; vnde erit circulus totus ad faſciam prædictam, vt triangulum HFG, ad trapezium IT. Eodem modo probabitur eſſe circumferentiam ad faſciam 4 ᶻR 9 8 7, vt HFG, triangulum ad trapezium kV; & circulum ad faſciam 7 8 9 MECDB, vt triangulum ad trapezium LG; & ſic probaretur de alijs. Ergo circulus erit ad omnes faſcias inſcriptas intra illum exceſſum, vt triangulum ad omnia trapezia inſcripta intra trilineum. Sed triangulum probatum eſt ſupra, eſſe ad omnia trapezia inſcripta in trilineo, in minori ratione, quam circulus ad exceſſum illum. Ergo circulus ad omnes faſcias inſcriptas intra exceſſum, erit in minori ratione, quam ad exceſſum ipſum. Quod implicat. Quare &c.

Sed nec etiam erit triangulum in maiori ratione ad trilineum, quam circulus ad exceſſum. Nam ſic, triangulum ad aliquid maius trilineo erit in eadem ratione cum circulo ad exceſſum. Sit exceſſus rurſum

Ω, vt

Ω, vt triangulum ſit ad trilineum cum Ω, in eadem ratione cum circulo ad exceſſum. Diuidatur iterum HG, biſariam, & partes iterum biſariam, & conſtituantur triangula, vt factum eſt prius, vt vnum triangulorum v.g. $F^{r}G$, minus ſit ſpatio Ω. Ergo triangulum ad trilineum ſimul cum triangulo $F^{r}G$, erit adhuc in maiori ratione quam circulus ad exceſſum. Si ergo factis circumſcriptione, & inſcriptione vt in ſchemate: patebit triangulum IFQ, cum trapezijs kI, Lk, HL, quæ ſunt æqualia exceſſui figuræ circumſcriptæ ſupra trapezia NQ, OT, PV, inſcripta, æqualia eſſe triangulo $F^{r}G$. Ergo figura circumſcripta ſuperabit inſcriptam ſpatio minori Ω. Ergo figura circumſcripta ſuperabit trilineum multò minori quantitate. Ergo triangulum ad figuram circumſcriptam erit in multo maiori ratione, quam circulus ad exceſſum. Sed eodem modo, quo factum fuit ſupra, probabimus, circulum ad ſectorem SA 3, eſſe vt triangulum ad triangulum IFQ: & circulum ad faſciam 3 $4^{\Sigma}R^{\lambda}S$ 3, vt triangulum HFG, ad trapezium kQ: & ſic de alijs faſcijs,& trapezijs circumſcriptis exceſſui prædicto, & ipſi trilineo. Ergo circulus ad totam figuram exceſſui circumſcriptam, erit vt triangulum ad figuram circumſcriptam trilineo. Ergo circulus erit in maiori ratione ad figuram circumſcriptam exceſſui, quam ad ipſum exceſſum. Quod iterum implicat. Ergo &c. Quod &c.

CO-

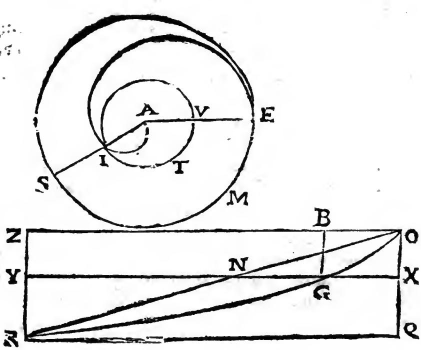
COROLLARIVM.

Ergo per conuerſionem rationis, erit circulus ad ipſum ſpatium ſpirale, vt triangulum ad exceſſum ipſius ſupra trilineum. Cum ergo oſtenſum ſit in ſchol. 1. propoſit. 1. lib. 1. de Infinit. Parab. eſſe triangulum HFG, ad exceſſum ipſius ſupra trilineum, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad numerum trilinei vnitate minutum: erit & circulus ad ſpatium ſpirale, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad ipſum vnitate minutum: nempe vt numerus ſpiralis binario auctus ad ipſum numerum ſpiralis (numerus enim trilinei ſuperat ſemper numerum ſpiralis vnitate.) Erit ergo circulus ad primum ſpatium ſpirale, vt 3. ad 1. Ad ſec. vt 4. ad 2. Ad tertium, vt 5. ad 3. Et ſic in infinitum, auctis ſemper antecedente, & conſequente vnitate.

PROPOSITIO X.

Si in ſpiralem quamcunque ex prima reuolutione ortam ducatur linea, & centro initio, interuallo illa linea deſcribatur circulus. Erit primus circulus ſpirali circumſcriptus, ad ſectorem circuli deſcripti contentum ducta linea, & portione abſciſſa à linea, quæ eſt initium reuolutionis in præcedentia, vt poteſtas ſemidiametri primi circuli duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem radij alterius circuli.

Eſto



ESto quælibet ſpiralis ex prima reuolutione orta A I E, in qua ducta vbilibet ab initio A, linea A I, centro A, interuallo A I, ſit deſcriptus circulus V I T V. Dico circulum radij A E, eſſe ad ſectorem A V T I A, vt poteſtas E A, duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem A I, ſeù A V. Nempe in lineari, vt cubus ad cubum. In quadratica, vt quadratoquadratum ad quadratoquadratum &c.

Nam circulus radij A E, ad ſectorem A V T I A, habet rationem compoſitam ex ratione ipſius ad circulum

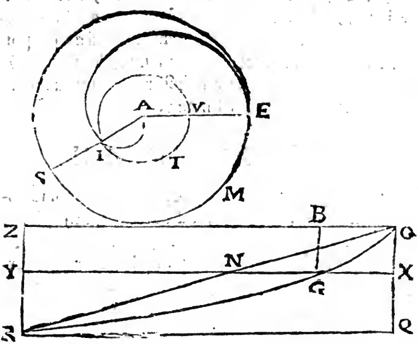
culum radij AV, & huius ad ſectorem. Sed vt circulus radij AE, ad circulum radij AV, ſic quadratum AF, ad quadratum AV: & vt circulus radij AV, ad ſectorem AVTIA, ſic peripheria VTIV, ad peripheriam VTI; nempe ſic peripheria EMSE, ad peripheriam EMS: & vt peripheria EMSE, ad EMS, ſic poteſtas EA, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem AI, ſeù AV, ex propoſit. 2. Ergo circulus radij AE, ad ſectorem AVTIA, habebit rationem compoſitam ex ratione AE, ad quadrati quadratum AV, & ex ratione poteſtatis AE, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem AV. Sed ex his duabus rationibus componitur ratio poteſtatis AE, duplici gradu altioris poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem AV. Quare patet propoſitum.

SCHOLIVM.

Cum in ſchol. propoſit. 6. probatum ſit, eſſe exceſſum circuli radij AE, ſupra ſpatium ſpirale, ad ſui partem contentam recta AV, & curuis AI, IT V, vt poteſtas pariter EA, duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem AV. Erit etiam prædictus exceſſus ad talem ſui partem, vt circulus radij AE, ad ſectorem AVTIA. Ex qua analogia, ſeù ſimilitudine proportionum licebit varia veluti corollaria deducere.

CO-

Digitized by Google



COROLLARIVM I.

Deducemus enim primo, quod intellecto trilineo parabolico R G O Q, vno gradu altiore gradu ſpiralis, cum ſibi circumſcripto triangulo R O Q; erit triangulum ad trilineum, vt ſector A V T I A, ad exceſſum ipſius ſupra portionem ſpatij ſpiralis comprehenſam recta,& curua A I. Quod patet, quia cum ſit totus circulus radij A E, ad ſectorem A V T I A, vt exceſſus circuli radij A E, ſupra ſpatium ſpirale

E ad

ad partem ipſius comprehenſam recta AV, & curuis VTI, IA: erit etiam permutando, circulus radij AE, ad exceſſum, vt AVTIA, ad illam partem exceſſus, quam comprehendit. Sed ex propoſ. 9. eſt circulus ad exceſſum, vt triangulum ROQ, ad trilineum. Ergo etiam ſector ad illum exceſſum erit, vt triangulum ad trilineum.

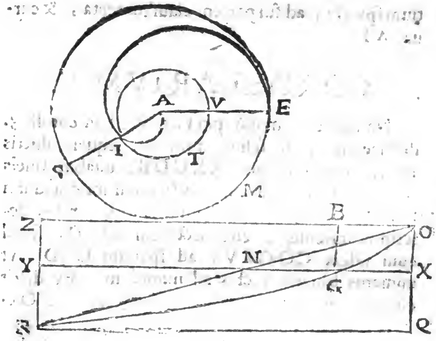
COROLLARIVM II.

Deducemus 2. eſſe etiam per conuerſionem rationis, ſectorem AVTIA, ad partem ſpatij ſpiralis contentam recta, & curua AI, vt triangulum ad exceſſum ipſius ſupra trilineum. Nempe iuxta explicata in ſchol. eiuſdem propoſit. vt numerus ſpiralis binario auctus, ad numerum ſpiralis.

COROLLARIVM III.

Deducemus 3. etiam armillam circularem cuius latitudo SI, vel VE, vna cum ſectore AVIA, eſſe ad ſpatium comprehenſum rectis AI, AE, & curua EI, vt numerus binario auctus, ad numerum. Cum enim probatum ſit, eſſe vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum, nempe vt totus circulus ad totum ſpatium, ſic ablatum ſectorem AVTIA, ad ablatum ſpatium: erit & reliquum ad reliquum vt totum ad totum.

CO-



COROLLARIVM IV.

Deducemus 4. eſſe totum ſpatium ſpirale ad portionem ſui contentam recta, & curua AI, vt poteſtas AE, duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem AI, ſeù AV. Cum enim probatum ſit, ſic eſſe totum circulum ad totum ſpatium, vt ſector AVTIV, ad partem clauſam recta, & curua AI. Erit etiam permutando, vt totus circulus ad ſectorem, nempe ex præſenti propoſit. vt poteſtas

E 2 teſtas

teſtas A E, duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem A I, ſeù A V, ſic totum ſpatium ſpirale, ad ſui partem clauſam recta, & curua A I.

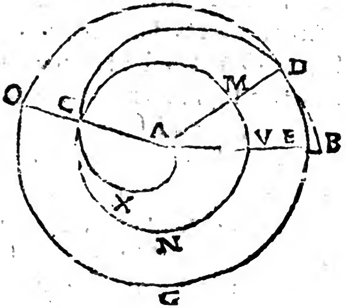
COROLLARIVM V.

Non diuerſo modo quo factum eſt in coroll. 3. deducemus 5. in ſchem. propoſit. ſequen. ductis ab A, initio ſpiralis A X C D B, duabus lineis A C, A D, intercipientibus ſpatium intermedium ſpirale C A D, ac ſemidiametris A C, A D, deſcriptis circulis, eſſe ſectorem O A D, ſimul cum faſcia C O G E V, ad ſpatium C A D, vt numerus binario auctus ad numerum. Ex dictis enim, eſt in dicta ratione tam totus ſector A D O G E A, ad totum ſpatium A D C X A, quam ablatus ſector A C N V A, ad ablatum ſpatium A C X. Ergo & reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum: nempe in dicta ratione.

PROPOSITIO XI.

Si ab initio cuiuſcunque ſpiralis ducantur duæ lineæ terminatæ ad duo puncta intermedia ſpiralis, & centro initio, interuallo maiori ductarum deſcribatur circulus. Sector circumſcriptus ſpatio ſpirali à duabus ductis clauſo, erit ad ipſum, vt factum ſub quadrato maioris ductæ in differentiam poteſtatum ductarum eiuſdem gradus cum ſpi-

rali, ad ſui tales partes, & facti ſub differentia quadratorum ductarum in poteſtatem minoris eiuſdem gradus cum ſpirali, quæ ſe habeant ad hæc facta vt numerus ſpiralis ad numerum auctum binario.

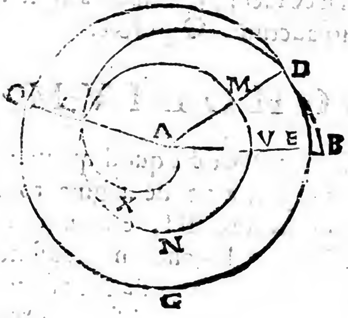


ESto quælibet ſpiralis AXCDB, & ab initio A, ſint ductæ AC, AD, & centro A, interuallo AD, maiori ſit deſcriptus circulus, &c. Dico ſectorem OAD, eſſe ad ſegmentum ſpirale CAD, vt factum ſub quadrato OA, in differentiam poteſtatem OA, AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſui tales partes, & facti ſub differentia quadratorum OA, AC, in poteſtatem AC, eiuſdem gradus cum ſpirali ſimul, quæ ſe habeant ad hæc facta, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum. V. g. in lineari, vt factum ſub quadrato OA, in OC, ad ⅓ ipſius, & facti ſub differentia quadratorum OA, AC, in AC. In quadratica, vt factum ſub quadra-

dra-

to OA, in differentiam quadratorum OA, AC, ad ⅔, huius, & facti ſub eadem differentia in quadratum CA. In cubica, vt factum ſub quadrato OA, in differentiam cuborum OA, AC, ad ⅔ huius facti, & facti ſub differentia quadratorum OA, CA, in cubum CA. Et ſic in infinitum. Centro etiam A, interuallo AC, deſcribatur alius circulus. Quoniam ſector OAD, eſt ad ſectorem CAM, vt quadratum OA, ad quadratum CA: ergo per conuerſionem rationis, erit ad faſciam MDOC, vt quadratum OA, ad differentiam quadratorum, OA, AC. Quoniam verò ex coroll. propoſit. prim. eſt circumferentia DO, ad circumferentiam OGE (nempe faſcia circularis MDOC, ad faſciam CO GEV,) vt differentia poteſtatum AD, ſeù OA, & AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem AC: & ſector OAD, ad faſciam CO GEV, habet rationem compoſitam ex ratione ipſius ad faſciam MDOC, & huius ad faſciam CO GEV. Ergo ſector ad faſciam COGEV, erit in ratione compoſita ex ratione quadrati OA, ad differentiam quadratorum OA, AC, & ex ratione differentiæ poteſtatum OA, AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem CA. Ergo ſector erit ad talem faſciam, vt factum ſub quadrato OA, in differentiam poteſtatum OA, CA, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad factum ſub differentia quadratorum OA, CA, in poteſtatem CA, eiuſdem gradus cum ſpirali. Et conuertendo, & componendo, erit fa-

ſcia



ſcia cum ſectore ad eundem ſectorem, vt factum ſub differentia quadratorum OA, CA, in poteſtatem CA, eiuſdem gradus cum ſpirali, cum facto ſub quadrato OA, in differentiam poteſtatum OA, CA, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad hoc ſecundò factum. Et rurſum conuertendo, erit ſector ad faſciam cum ſectore, vt ſecundo factum ad ambo facta. Sed ex coroll. 5. propoſit. anteced. ſector DAO, cum faſcia COGEV, eſt ad ſpatium ſpirale CAD, vt numerus ſpiralis binario auctus ad numerum ſpiralis; nempe vt ambo illa facta ad tales partes ipſorum, quæ ſint ad ipſa facta, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum. Ergo ex æquali, ſector OAD, erit ad ſpatium ſpirale CAD, vt factum ſub quadrato OA, in differentiam poteſtatum OA, CA, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad tales partes ipſius, & facti ſub differentia quadratorum OA, CA, & ſub

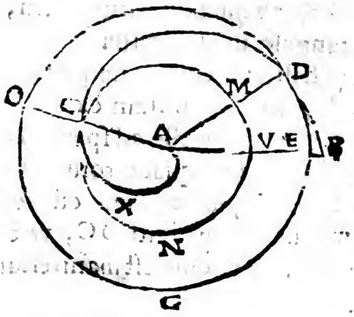
pote-

poteſtate C A, eiuſdem cum ſpirali gradus, quæ ſe habeant ad hæc facta, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum. Quod&c.

SCHOLIVM I.

Notandum tamen eſt, quod quamuis ſupradicta propoſitio propoſita ſit de ſegmento intermedio C A D, & de ſectore E I, circumſcripto, hoc tamen non eſt ita intelligendum, quaſi non verificetur etiam in ſegmento D A B, & in ſectore E I circumſcripto. Simili enim diſcurſu obteniretur intentum.

Sed in prima, & ſecunda ſpirali faciliorem rationem ſectoris ad ſpatium poſſumus, ex dictis, aſſignare. In prima enim ſpirali, erit ſector ad ſpatium, vt quadratum A D, ſeù O A, ad rectangulum O A C, cum ⅓ quadrati O C. In ſecunda autem, erit vt idem quadratum O A, ad rectangulum O A C, cum ½ ſeù cum dimidio quadrati O C. Primum patet: quia cum ex regula generali deducatur, ſectorem eſſe ad ſpatium, vt factum ſub O C, in quadratum O A, ad ⅓ huius, & facti ſub differentia quadratorum O A, A C, in A C; nempe facti ſub O C, in compoſitam ex O C, & dupla C A, & ſub C A: & cum in omnibus prædictis ſolidis ſit vnum commune latus, nempe O C: ſequitur ſectorem eſſe ad ſpatium, vt quadratum O A, ad ⅓ ipſius, & rectanguli ſub C A, & ſub compoſita ex O C, & dupla C A.



C A. Cum vero hoc rectangulum ſub C A, & ſub compoſita ex O C, & dupla C A, ſit æquale duplo quadrato C A, & rectangulo O C A. Sequitur ſectorem eſſe ad ſpatium, vt quadratum O A, ad $\frac{1}{3}$ eiuſdem, ſimul cum $\frac{1}{3}$ duorum quadratorum C A, & rectanguli O C A. Sed $\frac{1}{3}$ horum planorum eſt rectangulum O A C, cum $\frac{1}{3}$ quadrati O C. Quia quadratum O A, diuiditur in quadrata O C, C A, & in duo rectangula O C A. Colligendo ergo omnia hæc plana, habebimus tria quadrata C A; tria rectangula O C A; & quadratum O C. Quorum $\frac{1}{3}$ eſt vnum rectangulum O C A, cum vno quadrato C A (nempe rectangulum O A C) cum $\frac{1}{3}$ quadrati O C. Quare patet primum.

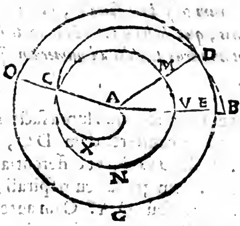
Ferè eodem modo patebit ſecundum. Quia cum ſector ſit ad ſpatium, vt factum ſub O C, in compoſitam ex O C, & dupla C A (hoc enim rectangu-

lum eſt differentia quadratorum O A, A C) & ſub quadrato O A, ad dimidium huius facti, & facti ſub eodem rectangulo in quadratum C A: & cum hæc omnia facta habeant commune planum rectangulum ſub O C, in compoſitam ex O C, & dupla C A: ſequitur ſectorem eſſe ad ſpatium, vt quadratum O A, ad dimidium quadratorum O A, A C. Sed dimidium horum quadratorum eſt rectangulum O A C, cum dimidio quadrati O C, vt conſideranti patebit. Quare ſecundum eſt manifeſtum.

SCHOLIVM II.

Ex dictis ergo in ſuperiori ſcholio, patet in prima, & ſecunda ſpirali, ſectorem ad ſpatium ſeruare hunc ordinem, vt ſit vt quadratum maioris ductæ, ad rectangulum ſub ductis, vna cum tali parte quadrati differentiæ ductarum, quæ ſit ad ipſum, vt numerus ſpiralis ad numerum binariò auctum; nempe ad $\frac{1}{3}$, & ad dimidium, nempe ad $\frac{2}{4}$. Forſitan ergo quis poſſet cogitare talem proportionem ſectoris ad ſpatium ſeruare hunc pulcherrimum ordinem, vt in tertia ſit, vt quadratum O A, ad rectangulum O A C, cum $\frac{3}{5}$ quadrati O C. In quarta cum $\frac{4}{6}$ quadrati O C. Et ſic in infinitum. Sed qui ſic putaret nimis à ſcopo aberraret, ſicuti patebit in numeris experienti in tertia ſpirali. Supponamus enim facilitatis gratia, O A, eſſe duplam A C. Quoniam cubus O A, eſſet 8, & cubus C A, 1: ergo differentia cuborum

O A,



O A, A C, eſſet 7. Cum ergo quadratum O A, ſit 4. Ergo factum ſub quadrato O A, & ſub differentia cuborum O A, A C, eſſet 28. Pariter factum ſub differentia quadratorum O A, A C, nempe ſub 3. & ſub cubo C A, nempe ſub 1, eſſet 3. Ergo ſector eſſet ad ſpatium vt 28. ad tria quinta 31. nempe ad 28. $\frac{3}{5}$ nempe, vt 4. ad 2. & $\frac{23}{35}$. Cum tamen quadratum O A, ſit ad rectangulum O A C, cum $\frac{3}{5}$ quadrati O C, vt 4. ad 2. cum $\frac{3}{5}$ nempe cum $\frac{23}{35}$. Quare &c.

Sed proportio ſectoris ad ſpatium prædictum poteſt alio modo, & compendioſius, pateſieri. Quapropter ſit.

PROPOSITIO XII.

Idem ſector ad idem ſegmentum, erit vt idem antecedens

ad tales partes differentiæ poteſtatum ductarum duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, ſupra ſimilem poteſtatem minoris, quæ ſe habeant ad totam dictam differentiam, vt numerus ſpiralis ad numerum ſpiralis binario auctum.

EOdem enim modo, quo ſupra factum fuit, oſtendemus, circumferentiam DO, eſſe ad circumferentiam DOGE, vt differentia poteſtatum DA, AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem poteſtatem DA, ſeu OA. Cum autem ſit, vt circumferentia DO, ad circumferentiam DOE, ſic ſector ADO, ad ſectorem ADOEA; & pariter cum ſit, vt prædicta differentia ad prædictam poteſtatem OA, ſic factum ex dicta differentia in quadratum OA, ad poteſtatem OA, duplici gradu altiorem poteſtate ſpiralis. Ergo ſector DAO, erit ad ſectorem ADOEA, vt factum ſub dicta differentia poteſtatum OA, AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum OA, ad poteſtatem OA, duplici gradu altiorem poteſtate ſpiralis. At ſector ADOEA, eſt ad ſpatium ſpirale AXCDA, vt numerus ſpiralis binario auctus, ad numerum, ex coroll. 2. propoſit. 10. nempe vt poteſtas OA, duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad tales partes ſui, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ad numerum binario auctum. Ergo ex æquali, ſector DAO, erit ad AXCDA, vt factum ſub prædicta differentia in quadratum OA, ad dictas partes poteſtatis OA.

Rur-

Rurſum, cum ſpatium ſpirale A X C D A, ſit ad ſpatium A X C A, vt poteſtas D A, ſeù O A, duplici gradu altior poteſtate ſpiralis, ad ſimilem poteſtatem C A, ex coroll. 4. propoſit. 10. nempe, vt tales partes talis poteſtatis O A, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum, ad ſimiles partes poteſtatis C A: erit per conuerſionem rationis, A X C D A, ad A C D, vt tales partes poteſtatis O A, ad exceſſum ipſarum ſupra ſimiles partes poteſtatis C A. Quare rurſum ex æquali, erit ſector D A O, ad ſegmentum C A D, vt factum ſub differentia poteſtatum O A, C A, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum O A, ad tales partes differentiæ poteſtatum O A, A C, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad totam differentiam, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum. Quod &c.

COROLLARIVM.

Ex hac propoſit. & ex anteced. quamuis extra intentum, colligemus, differentiam poteſtatum O A, A C, cuiuslibet gradus, æqualem fore facto ſub quadrato O A, in differentiam poteſtatum O A, A C, dupli gradu inferiorum, & facto ſub differentia quadratorum O A, A C, in poteſtatem C A, itidem duplici gradu inferiorem. V.g. differentia quadratoquadratorum O A, A C, erit æqualis facto ſub quadrato O A, & ſub differentia quadratorum O A,

A C,

A C, vna cum facto ſub dicta differentia quadratorum O A, A C, in quadratum A C. Quod vtique eſt manifeſtum. Nam ex prop. 11. ſector O A D, eſt ad ſpatium C A D, vt factum ſub quadrato O A, in differentiam poteſtatum O A, A C, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſui talem partem, & facti ſub differentia quadratorum O A, A C, & ſub poteſtate A C, eiuſdem gradus cum ſpirali, quæ ſe habeat ad hæc, vt numerus ad numerum binario auctum. Ex præſenti propoſit. idem ſector O A D, eſt ad idem ſpatium C A D, vt idem factum ſub quadrato O A, in differentiam poteſtatum O A, A C, eiuſdem gradus cum ſpirali ad talem partem differentiæ poteſtatum O A, A C, duplici gradu altiorum poteſtatę ſpirali, quæ ſe habeat ad dictam differentiam, vt numerus ad numerum binario auctum. Ergo ambo conſequentia harum proportionum erunt æqualia. Cumque ſint ſimiles partes illarum magnitudinum cuius ſunt partes: etiam integræ magnitudines erunt æquales. Differentia ergo poteſtatum O A, A C, dupli gradu altiorũ gradu ſpiralis, erit ęqualis facto ſub quadrato O A, in differentiam poteſtatum O A, A C, eiuſdem gradus cũ ſpirali, vna cum facto ſub differẽtia quadratorum O A, A C, in poteſtatem C A, eiuſdem gradus cũ ſpirali. Quod vtique illud idem eſt, quod ſupra dictum fuit.

SCHOLIVM.

Sed ſicuti in ſchol. prim. propoſit. anteced. depreſ-

preſſi fuerunt termini proportionis dictæ primæ, & ſecundæ ſpiralis ad terminos inferiores, ſic licebit ipſos in præſenti deprimere, & compendioſiores rationes aſſignare, vt ibidem factum fuit. An verò neceſſe ſit in alijs ſpiralibus altiorum graduum retinere proportiones illarum poteſtatum, adeo vt nullatenus liceat ipſas deprimere, non videtur affirmandum. Sed quomodo poſſint deprimi, videat lector proprio Marte. Saltem enim ex doctrinis Franciſci Vietæ explicatis in notibus prioribus ad Logiſticen Specioſam à propoſit. 14. infra, colliget poſſe dictas proportiones deprimi vno gradu. Colligitur enim ex ibidem ab ipſo oſtenſis. Conſectarium ſuum vniuerſale, quod habet poſt propoſit. 24. Quod *Differentia poteſtatum ſi adplicetur ad differentiam laterum orientur ſingularia homogenea quibus conſtat poteſtas gradus proxime inferioris adgregati ipſorum laterum, ſemel ſumpta. Et è contra.* V.g. ſi cubus OA, minus cubo AC, adplicetur ad OC, differentiam laterum OA, AC, orientur quadratum OA, rectangulum OAC, & quadratum AC, ſimul, & ſemel ſumpta; quæ plana ſunt omnia ſingularia plana poteſtatis vnius gradus inferioris, nempe quadrati, adgregati laterum OA, AC. Et ſic in alijs poteſtatibus. Cum ergo proportio ſectoris OAD, ad ſpatium CAD, ſit eadem cum ratione facti ſub quadrato OA, in differentiam poteſtatum OA, AC, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad partes explicatas differentiæ poteſtatum OA, AC, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis: patet

ambos

ambos terminos huius proportionis poſſe adplicari ad O C, differentiam laterum. Sed hæc omnia melius percipientur exemplificando in tertia ſpirali. *In* hac ſector O A D, eſt ad ſpatium C A D, vt factum ſub quadrato O A, in differentiam cuborum O A, A C, ad $\frac{3}{5}$ differentiæ quadratocuborum O A, A C. Si adplicetur ad O C, differentiam laterum differentia cuborum O A, A C; orietur ſumma planorum ſingulariter, quibus conſtat quadratum adgregati laterum O A, C A, ſimul ſumptorum; nempe quadratum O A, rectangulum O A C, & quadratum A C.

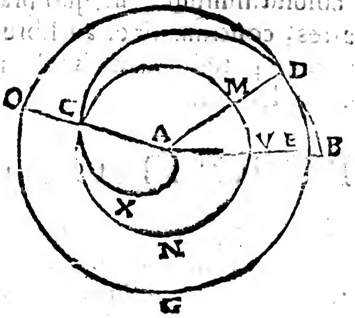
Si verò adplicetur ad eandem O C, differentia quadratocuborum O A, A C; orietur ſumma planoplanorum ſingulariter, quibus conſtat quadratoquadratum laterum adgregati O A, A C, ſimul ſumptorum, nempe.

Quadratoquadratum O A. Plus cubus O A, in A C. Plus quadratum O A, in quadratum A C. Plus O A, in cubum A C. Plus quadratoquadratum A C.

Ergo in ſpirali cubica erit ſector O A D, ad ſpatium ſpirale C A D, vt quadratoquadratum O A. Plus cubus O A, in A C. Plus quadratum O A, in quadratum C A. ad $\frac{3}{5}$ planoplanorum ſupra ennumeratorum.

Ex quibus videtur poſſe deduci aliam regulam generalem aſſignandi rationem ſectoris O A D, in quacunque ſpirali, ad ſpatium ſpirale C A D. Et hæc

erit,



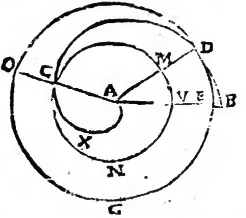
erit, quod ſit vt factum ſub quadrato OA, in omnes ſingulares partes poteſtatis adgregati OA, AC, vno gradu inferioris poteſtate ſpiralis, ad omnium ſingularium partium poteſtatis adgregati tales partes OA, AC, vno gradu ſuperioris poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſas, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum. Sed hæc, & ſimilia compendia, vt diximus, lector proprijs adinueniet viribus, ſi operibus Analyſtarum aliquando incubuerit. Quamplures etenim adinueniuntur, qui egregiè, & cum ſumma laude in hac materia ſcripſere; ſed omnibus Colophonem imponet Excellentiſſimus Geometra Carolus Rinaldinus Sereniſſimi Magni Principis Etruriæ Mathematicus in quodam magno opere; quod iam exantlauit, quodque in poſterum, immo quam primum, typis committet. Quamplurima etenim vir ille egregius tum philoſophica, tum ma-

thematica molitus eſt: ſed inter hæc extat opus algebricum abſolutiſſimum; in quo præter omnes Analyſis partes, concinnauit etiam librum non paruum, in quo in amplitudinem artis ſoluta fuere plus quam 300. problemata.

PROPOSITIO XIII.

Si in ſpatio anteced. propoſit. ſemidiametro minori linea, inſcribatur ſector ACM. Erit COD, trilineum exceſſus ſectoris maioris ſupra ſpatium, ad MDC, trilineum exceſſum ſpatij ſupra ſectorem minorem, vt exceſſus facti ſub differentia poteſtatum OA, CA, eiuſdem gradus cum ſpirali in quadratum OA, ſupra tales partes differentiæ poteſtatum OA, CA, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad dictam differentiam, vt numerus ſpiralis ad eundem numerum binario auctum, ad exceſſum prædictarum partium differentiæ poteſtatum OA, CA, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, ſupra factum ſub differentia poteſtatum OA, CA, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum CA.

V. G. in ſpirali lineari, erit trilineum ODC, ad trilineum CDM, vt exceſſus facti ſub OC, in quadratum OA, ſupra tertiam partem differentiæ cuborum OA, AC, ad exceſſum talis tertiæ partis huius differentiæ, ſupra factum ſub OC, in quadratum CA. In quadratica, vt exceſſus facti ſub differentia quadratorum OA, CA, in quadratum



tum OA, ſupra $\frac{1}{4}$ differentiæ quadratoquadratorum OA, CA, ad exceſſum harum ſupra factum ſub differentia quadratorum OA, AC, in quadratum CA. Et ſic in cæteris in infinitum.

Quoniam enim ſector ODA, eſt ad ſegmentum CAD, ex propoſit. anteced. vt factum ſub differentia poteſtatum OA, CA, eiuſdem gradus cum ſpirali, & ſub quadrato OA, ad talem partem differentiæ poteſtatum OA, CA, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeat ad ipſam differentiam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum: ergo & diuidendo, trilineum ODC, erit ad ſegmentum CAD, vt exceſſus antecedentis prædicti ſupra dictum conſequens, ad ipſum. Aſt, quoniam ſector ODA, eſt ad ſectorem CAM, vt quadratum OA, ad quadratum CA; nempe vt factum ſub quadrato OA, in differentiam poteſta-

tum O A, C A, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad factum ſub tali differentia, & ſub quadrato C A. Ergo & ſegmentum C A D, erit ad ſectorem C A M, vt partes differentiæ poteſtatum O A, C A, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum, ad factum ſub differentia poteſtatum O A, C A, eiuſdem gradus cum ſpirali, & ſub quadrato C A. Quare & diuidendo, erit trilineum C D M, ad ſectorem C A M, vt exceſſus huius ſecundi antecedentis, ſupra tale ſecundum conſequens, ad ipſum conſequens. Ergo facilè concludemus ex ęquali, eſſe O C D, ad C D M, vt exceſſus primi antecedentis prædicti ſupra primum conſequens, ad exceſſum ſecundi antecedentis ſupra ſecundum conſequens. Quod &c.

SCHOLIVM.

Sed quoniam in ſuperioribus in duabus primis ſpiralibus compendioſius oſtenſa eſt ratio ſectoris O A D; ad ſpatium C A D, compendioſius etiam oſtendemus in prima ſpirali, eſſe ODC, ad CDM, vt C A, cum $\frac{2}{3}$ O C, ad C A, cum $\frac{1}{3}$ O C. Quod ſic patebit. Quia cum probatum ſit in ſchol. 2. poſit. 11. ſectorem O A D, eſſe ad ſegmentum C A D, vt quadratum O A, ad rectangulum O A C, cum $\frac{1}{3}$ quadrati O C. Ergo diuidendo, erit O D C, ad C A D, vt rectangulum O C A, cum $\frac{2}{3}$

qua-

quadrati OC, ad rectangulum OAC, cum ⅓ quadrati OC (illis enim planis quadratum OA, excedit rectangulum OAC, cum ⅓ quadrati OC.) Pariter, cum ſector ODA, ſit ad ſectorem CAM, vt quadratum OA, ad quadratum CA. Ergo & ſpatium CAD, erit ad ſectorem CAM, vt rectangulum OAC, cum ⅓ quadrati OC, ad quadratum CA. Et diuidendo, erit CDM, ad CAM, vt rectangulum OCA, cum ⅓ quadrati CO, ad quadratum CA. Facile ergo concludetur, ODC, eſſe ad CDM, vt rectangulum OCA, cum ⅓ quadrati OC, nempe cum rectangulo ſum OC, & ſub ⅓ OC, ad rectangulum OCA, cum ⅓ quadrati OC, nempe cum rectangulo ſub OC, & ſub ⅓ OC. Cum ergo omnia hæc rectangula habeant commune latus OC, erit ODC, ad CDM, vt CA, cum ⅓ OC, ad CA, cum ⅓ OC.

In ſecunda autem ſpirali oſtendemus eodem modo, ODC, & CDM, æqualia eſſe. Quare ſequitur CD, portionem ſpiralis quadraticæ eſſe veluti dimetientem faſciæ ODMC. Quod ſic patebit. Quia cum in ſchol. citat. oſtenſum fuerit, ſectorem eſſe ad ſpatium, vt quadratum OA, ad rectangulum OAC, cum ½ quadrati CO. Ergo diuidendo, ODC, erit ad CAD, vt rectangulum OCA, cum dimidio quadrati OC, ad rectangulum OAC, cum dimidio quadrati OC. Sed pariter probabimus diuidendo, CDM, eſſe ad CAM, vt rectangulum OCA, cum dimidio quadrati OC, ad quadratum CA. Vnde facile

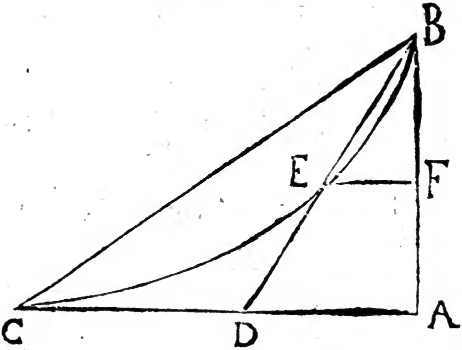
facile concludemus, ODC, eſſe ad CDM, vt rectangulum QCA, cum ⅓ quadrati OC, ad rectangulum OCA, cum ⅓ quadrati OC; nempe vt æquale, ad æquale. Quod &c. Sed etiam in alijs ſpiralibus poterit prædicta ratio aliqualiter deprimi. Sed videat lector modum depreſſionis.

PROPOSITIO XIV.

Si cuilibet trilineo à primo, ſecto vt in propoſit. 5. ſit circumſcriptum triangulum. Erit triangulum pars totius, cuius latus non eſt diameter trilinei, ad portionem exceſſus ipſius ſupra portionem trilinei à ſe comprehenſam, vt factum ſub exceſſu poteſtatis diametri trilinei vno gradu inferioris poteſtate trilinei, ſupra ſimilem poteſtatem diametri trilinei ad verticem, in quadratum diametri trilinei, ad tales partes exceſſus poteſtatis diametri trilinei vno gradu altioris poteſtate trilinei ſupra ſimilem poteſtatem trilinei ad verticem, quæ ad talem exceſſum ſe habeant vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum vnitate auctum.

HÆc propoſit. eſt 24. lib. prim. de Infinit. Parab. In ſchemate ergo propoſit. 5. ducatur CB. Dico triangulum CBD, eſſe ad ſpatium CBEC, comprehenſum à rectis CB, BE, & à curua CE, vt factum ſub exceſſu poteſtatis AB, vno gradu inferioris poteſtate trilinei, ſupra ſimilem poteſtatem BF, in quadratum BA, ad tales partes

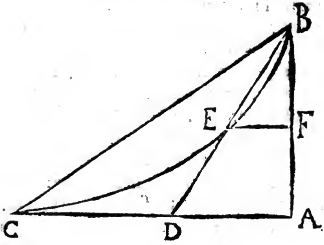
exceſ-



exceſſus poteſtatis AB, vno gradu ſuperioris poteſtate trilinei, ſupra ſimilem poteſtatem BF, quæ ſe habeant ad talem exceſſum, vt numerus trilinei vnitate minutus ad numerum trilinei vnitate auctum. V. g. in trilineo quadratico, erit vt factum ſub FA, in quadratum BA, ad tertiam partem exceſſus cubi BA, ſupra cubum BF. In cubico, vt factum ſub exceſſu quadrati BA, ſupra quadratum BF, in quadratum BA, ad $\frac{2}{4}$ exceſſus quadratoquadrati AB, ſupra quadratoquadratum BF. In quadratoquadratico, vt factum ſub exceſſu cubi AB, ſupra cubum BF, in quadratum BA, ad $\frac{3}{5}$ exceſſus quadratocubi AB, ſupra quadratocubum BF. Et ſic in infinitum.

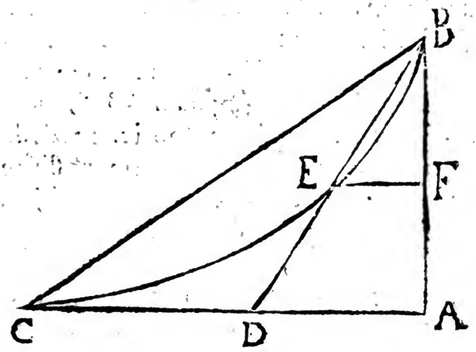
Quoniam enim ex propoſit. 5. eſt CA, ad AD, nem-

nempe triangulum CBA, ad triangulum DBA, vt poteſtas AB, vno gradu inferior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem BF. Ergo per conuerſionem rationis, & conuertendo, erit triangulum CBD, ad triangulum CBA, vt exceſſus poteſtatis AB, vno gradu inferioris poteſtate trilinei, ſupra ſimilem poteſtatem BF, ad poteſtatem BA. Et ducendo hos terminos in quadratum BA, erit CBD, ad CBA, vt factum ſub exceſſu poteſtatis AB, vno gradu inferioris poteſtate trilinei ſupra ſimilem poteſtatem BF, in quadratum BA, ad factum ſub poteſtate BA, vno gradu inferiore poteſtate trilinei in quadratum BA; nempe ad poteſtatem BA, vno gradu ſuperiorem poteſtate trilinei. At triangulum CBA, eſt ad exceſſum ipſius ſupra trilineum, nempe ad ſpatium contentum à recta, & curua CB, vt numerus trilinei vnitate auctus ad numerum trilinei vnitate minutum, ex ſchol. 1. propoſit. 1. lib. 1. de Infinit. Parab. nempe vt poteſtas AB, vno gradu ſuperior poteſtate trilinei ad tales ſui partes, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Ergo ex æquali, erit triangulum CBD, ad ſpatium contentum à recta, & curua CB, vt factum ſub exceſſu poteſtatis AB, vno gradu inferioris poteſtate trilinei ſupra ſimilem poteſtatem BF, in quadratum BA, ad tales partes poteſtatis AB, vno gradu ſuperioris poteſtate trilinei, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus,



tus , ad numerum trilinei vnitate auctum. Rurſum, ſpatium comprehenſum à recta, & curua C B, eſt ad ſpatium comprehenſum à recta, & curua B E, vt poteſtas A B, vno gradu ſuperior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem B F, ex ſchol. 1. propoſit. 3. lib. 1. nempe vt tales partes prædictæ poteſtatis A B, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum, ad ſimiles partes poteſtatis B F. Ergo per conuerſionem rationis, erit ſpatium comprehenſum à recta, & curua C B, ad exceſſum ipſius ſupra ſpatium comprehenſum à recta, & curua B E, vt tales partes poteſtatis A B, vno gradu altioris poteſtate trilinei, quæ ſe habeant ad ipſam poteſtatem A B, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum tri-

H linei



tiam poteſtatum AB, BF, vno gradu depreſſiarum poteſtate trilinei (nempe eiuſdem gradus cum ſpirali, quia ſemper poteſtas trilinei ſupponitur vno gradu altior poteſtate ſpiralis) ad tales partes differentiæ poteſtatum AB, BF, vno gradu altiorum poteſtate trilinei (nempe duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis) quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus (nempe vt numerus ſpiralis) ad numerum trilinei vnitate auctum (nempe ad numerum ſpiralis binario auctum.) Quæ ratio eſt eadem, quæ aſſignatur in propoſit. 12. vt conſideranti fiet manifeſtum.

Ex his ergo habemus, quod nunc omnia verificabuntur, quæ vera erant in illis propoſit. & in ſchol. earundem. Ergo ex ſchol. propoſit. 11. deduce-

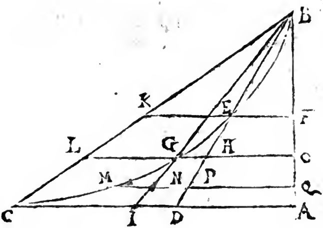
mus, eſſe triangulum CBD, ad ſpatium comprehenſum à rectis CB, BE, & à curua CE, in trilineo quadratico, vt quadratum AB, ad rectangulum ABF, cum $\frac{1}{2}$ quadrati AF. In trilineo cubico, vt quadratum AB, ad rectangulum ABF, cum $\frac{2}{3}$ quadrati AF. Ex ſchol. autem propoſit. 12. deducemus, proportionem trianguli ad ſpatium poſſe reduci ad depreſſiores poteſtates, & ideo poſſe alijs terminis pronunciari, vt ibidem factum fuit, ſic. Triangulum ad ſpatium erit, vt factum ſub quadrato AB, in omnes ſingulares partes poteſtatis adgregati AB, BF, duplici gradu inferioris poteſtate trilinei, ad tales partes omnium ſingularium partium poteſtatis adgregati AB, BF, eiuſdem gradus cum trilineo, quæ ſe habeant ad ipſas, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum vnitate auctum.

PROPOSITIO XV.

In ſchem. propoſit. anteced. ducta HO, parallela DA. Erit CA, ad HO, vt poteſtas AB, eiuſdem gradus cum trilineo, ad factum ſub OB, in poteſtatem BF, vno gradu inferiorem poteſtate trilinei.

PAtet, quia ratio CA, ad HO, componitur ex rationibus CA, ad AD, & AD, ad HO. Sed vt CA, ad AD, ſic ex propoſit. 5. poteſtas AB, vno gradu inferior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem BF. Et vt DA, ad HO, ſic

AB,



A B, ad B O. Ergo ratio C A, ad H O, erit compoſita ex prædictis rationibus. Aſt ex illis componitur etiam ratio poteſtatis A B, eiuſdem cum trilineo gradus, ad factum ſub O B, in poteſtatem B F, vno gradu inferiorem poteſtate trilinei. Quare patet propoſitum.

PROPOSITIO XVI.

In ſchem. propoſit. anteced. ſi O H, parallela C A, occurrat curuæ in G. Erit C D, ad G H, vt factum ſub A B, & ſub differentia poteſtatum A B, B F, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei, ad factum ſub O B, & ſub differentia poteſtatum O B, B F, itidem vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei.

PRO-

QVoniam enim ex propoſit. 5. eſt CA, ad AD, vt poteſtas AB, vno gradu inferior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem BF; ergo per conuerſionem rationis, & conuertendo, erit CD, ad CA, vt differentia poteſtatum AB, BF, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem AB; nempe ducendo hæc in AB, vt factum ſub AB, in dictam differentiam, ad poteſtatem AB, eiuſdem gradus cum trilineo. Sed quoniam ex natura trilinei, eſt CA, ad GO, vt poteſtas AB, eiuſdem gradus cum trilineo, ad ſimilem poteſtatem BO: & eſt CA, ad HO, ex propoſit. anteced. vt poteſtas AB, eiuſdem gradus cum trilineo, ad factum ſub AB, in poteſtatem BF, vno gradu inferiorem poteſtate trilinei. Ergo erit CA, ad GH, vt poteſtas AB, eiuſdem gradus cum trilineo, ad factum ſub OB, & ſub differentia poteſtatum OB, BF, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei. Sed ſupra probata fuit CD, ad CA, vt factum ſub AB, & ſub differentia poteſtatum AB, BF, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei, ad poteſtatem AB, eiuſdem gradus cum trilineo. Quare ex æquali, erit CD, ad GH, vt factum ſub BA, in differentiam poteſtatum AB, BF, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei, ad factum ſub OB, in differentiam ſimilium poteſtatum OB, BF. Quod erat oſtendendum.

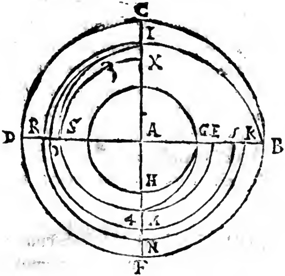
PRO-

PROPOSITIO XVII.

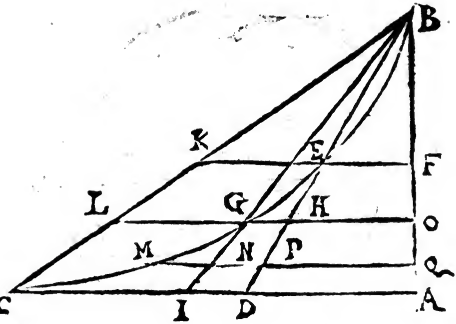
Exceſſus circuli circumſcripti ſpatio ſpirali cuiuſcunque generis, & ex quacunque reuolutione ſupra ipſum ſpatium, eſt æqualis in ſchem. propoſit. antecedent. trilineo mixto C E D, trilinei vno gradu altioris poteſtate ſpatij, comprehenſo à curua C G E, & à rectis C D, D E: dummodo A B, æquetur ſemidiametro circuli; B F, ſemidiametro circuli vnitate minoris, & C A, tot circumferentijs maioris circuli, quotus eſt numerus reuolutionum ſpatij.

ESto G M S I B G, ſpatium ſpirale cuiuſcunque generis, & ortum ex quacunque reuolutione, & F D C B, ſit circulus ipſi circumſcriptus; ſit etiam circulus radij A G, ipſo vnitate minor: v. g. ſi circulus radij A B, ſit circumſcriptus ſecundo ſpatio, ſit circulus radij A G, primi ſpatij: ſi ille ſit circulus tertij ſpatij, ſit hic ſecundi: &c. item ſit trilineum propoſit. anteced. C E B A, vno gradu altius gradu ſpatij ſpiralis; ſitque A B, in trilineo æqualis A B, ſemidiametro circuli maioris, & B F, in trilineo æqualis ſemidiametro A G, circuli minoris: pariter ſit C A, in trilineo æqualis tot peripherijs F D C B, quotus eſt numerus ſpatij G M S I B G: v. g. ſi ſpatium ſit ex ſecunda reuolutione, duabus: ſi tertiæ, tribus: & ſic ſemper. Dico, exceſſum circuli radij A B, ſupra dictum ſpatium, æqualem fore trilineo C G E D.

Quo-



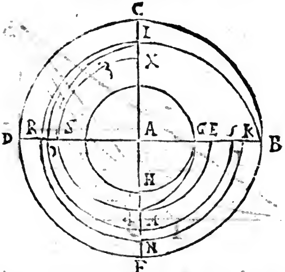
Quoniam enim in ſpirali circulus radij A G, eſt vnitate minor circulo radij A B. Ergo ex natura infinitarum ſpiralium initio explicata, diuiſa poteſtate A B, eiuſdem gradus cum ſpirali in tot partes quotus eſt numerus reuolutionum, poteſtas A G, eiuſdem gradus cum ſpirali continebit ipſas, vna excepta, adeo vt differentia poteſtatum B A, A G, ſit vnica talium partium. Cum verò etiam in trilineo, A B, ſit aqualiter ſecta in F, ſicuti illa in G: etiam differentia poteſtatum A B, B F, eiuſdem gradus cum ſpirali, & gradus vnitate minoris poteſtate trilinei, continebit talium partium vnicam partem. Sed quoniam ex propoſit. 5. eſt C A, ad A D, vt poteſtas A B, vno gradu inferior poteſtate trilinei, ad ſimi-



ſimilem poteſtatem BF. Ergo per conuerſionem rationis, erit CA, ad CD, vt poteſtas dicta AB, ad differentiam poteſtatum AB, BF. Sed CA, æquatur tot circumferentijs FDCB, quotus eſt numerus reuolutionum: & differentia poteſtatum AB, BF, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei continet vnicam partem poteſtatis ſimilis AB, diuiſæ in tot partes quotus eſt numerus reuolutionum. Ergo CD, erit æqualis vni circumferentiæ FDCB. Sed etiam BA, diameter trilinei æquatur radio AB, circuli. Ergo triangulum CBD, in trilineo, erit æquale circulo radij AB. Quæ ſeruentur.

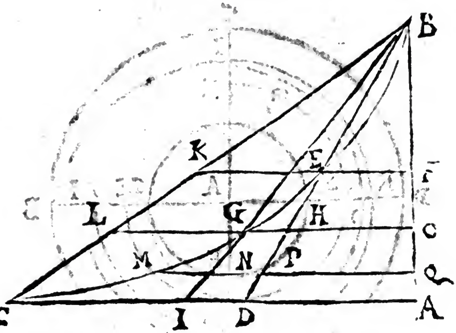
Tunc, in GB, in ſpirali accipiatur quodlibet punctum E, & centro A, interuallo AE, deſcribatur circuli peripheria EM, occurrens ſpirali in M; & facta in trilineo FO, æquali GE, ducatur OHG,

I paral-



parallela CA. Quoniam in ſpirali, ex propoſit. 4. eſt peripheria FDCB, ad peripheriam EM, vt factum ſub AB, in differentiam poteſtatum BA, AG, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad factum ſub EA, in differentiam ſimilium poteſtatum EA, AG: & pariter in trilineo, ex propoſit. anteced. eſt CD, ad GH, vt factum ſub AB, in differentiam poteſtatum AB, BF, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei, (nempe eiuſdem gradus cum ſpirali) ad factum ſub OB, in differentiam ſimilium poteſtatum OB, BF. Ergo, vt in ſpirali circumferentia FDCB, ad circumferentiam EM, ſic in trilineo, CD, ad GH. Et permutando, vt FDCB, ad CD, ſic EM, ad GH. Sed circumferentia FDCB, probata fuit æqualis rectæ CD. Ergo &

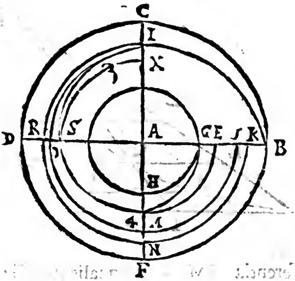
cir-



circumferentia EM, erit æqualis ipſi GH. Sed FA, in trilineo eſt æqualis GB, in ſpirali, & puncta E, O, accepta fuerunt arbitrariè, & inuenta fuit æqualitas. Ergo omnes circumferentiæ exceſſus circuli radij AB, ſupra ſpatium ſpirale concentricæ ipſi FDCB, æquales erunt omnibus lineis trilinei CGED, parallelis ipſi CD. Ergo exceſſus prædictus erit æqualis trilineo mixto CGED. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM I.

Qui parui pendet indiuiſibilia, & gratulatur excruciari in methodo archimedea, ipſam experiatur, nam eandem veritatem deducet. Attentè etiam conſideret, quod probatum fuit de totis, probari



quoque poſſe de partibus proportionalibus. Non enim tantum totus exceſſus æquabitur toto trilineo CGED. Sed etiam pars clauſa peripheriæ BCDFB, ſpirali BISM, peripheria ME, & recta EB, erit æqualis quadrilatero CGHD. Item reliqua pars GMEG, æqualis trilineo EGH. Idem dicatur de cæteris partibus proportionalibus.

SCHOLIVM II.

Ergo per conuerſionem rationis, erit circulus ad ipſum ſpirale ſpatium, vt triangulum CBD, ad ſpatium comprehenſum rectis CB, BE, & curua CGE.

Cum

Digitized by Google

Cum verò ex propoſit. 14. ſit triangulum CBD, ad illud ſpatium, vt factum ſub differentia poteſtatum AB, BF, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei (nempe eiuſdem gradus cum ſpirali) in quadratum BA, ad tales partes differentiæ poteſtatum AB, BF, vno gradu ſuperiorum poteſtate trilinei (nempe duplici gradu ſuperiorum poteſtate ſpiralis,) quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus (nempe vt numerus gradus ſpiralis) ad numerum trilinei vnitate auctum (nempe ad numerum gradus ſpiralis binario auctum.) Ergo etiam circulus radij AB, erit ad ſpatium ſpirale GMSIBG, vt factum ſub differentia poteſtatum BA, AG, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum BA, ad tales partes differentiæ poteſtatum BA, AG, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad dictam differentiam, vt numerus gradus ſpiralis ad ipſum binario auctum.

SCHOLIVM III.

Immo ex ſchol. citat. propoſit. 14. poterimus alias compendioſiores rationes aſſignare. Nam in ſpirali lineari deducemus, eſſe circulum ad ſpatium, vt quadratum BA, ad rectangulum BAG, cum $\frac{1}{3}$ quadrati BG. In quadratica, vt idem quadratum BA, ad idem rectangulum BAG, cum $\frac{1}{4}$ quadrati GB. Et vniuerſaliter deducemus, eſſe circulum ad ſpatium, vt factum ſub quadrato AB, in omnes ſingu-

lares

lares partes poteſtatis adgregati AB, AG, vnius gradus inferioris, gradu ſpiralis, ad tales partes omnium ſingularium partium poteſtatis adgregati AB, AG, vno gradu altioris poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſas, vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

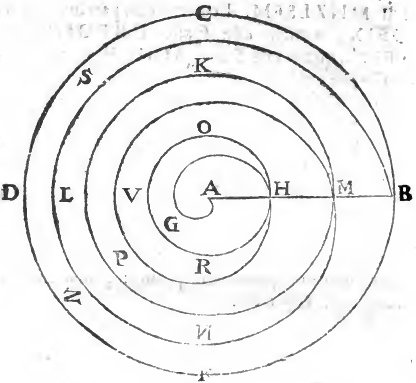
PROPOSITIO XVIII.

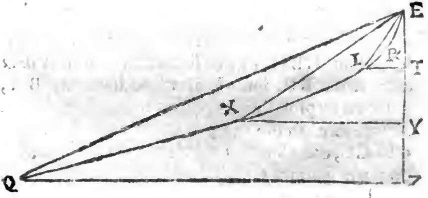
Omnia ſpatia ſpiralia ſucceſſiuè inſcripta in quibuslibet circulis ſimul ſumpta, ſunt ad tot circulos maiores quotus eſt numerus reuolutionum, vt numerus gradus ſpiralis ad numerum binario auctum.

SInt quælibet ſpatia ſpiralia AGH, HRPM, MNLSB, inſcripta in circulis radiorum AH, AM, AB. Dico omnia illa ſpatia ſimul ſumpta eſſe ad tot circulos radij AB, quotus eſt numerus reuolutionum (nempe in noſtro caſu ad tres) vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum. Nempe in prim. vt 1. ad 3. In ſecund. vt 2. ad 4. vt 3. ad 5. &c.

Sit etiam triangulum QEZ, cum ſibi inſcripto trilineo parabolico QEZ, gradus congruentis gradui ſpiralis; ſitque talis indolis, vt ZE, YE, ET, ſint æquales AB, AM, AH; & QZ, ſit æqualis tot peripherijs BFDC, quotus eſt numerus reuolutionum. Ergo ex propoſit. anteced. ſpatium contentum rectis QE, EX, & curua QX, erit æquale ſpatio ſpi-

rali





Digitized by Google

rali MNZLSBM. Eodem modo patebit ſpatium XEIX, æquale eſſe ſpatio HRPOMH: & IEI, æquale eſſe ſpatio AGH. Ergo totus exceſſus trianguli QEZ, ſupra trilineum, erit æqualis omnibus ſpatijs ſpiralibus ſimul ſumptis. Sed etiam triangulum QEZ, eſt æquale tot circulis radij AB, quotus eſt numerus reuolutionum. Ergo exceſſus trianguli QEZ, ſupra trilineum erit ad ipſum triangulum, vt omnia ſpatia ſpiralia ad tot circulos radij AB, quotus eſt numerus reuolutionum. Nempe ex conuerſo coroll. propoſit. 9. vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum. Nempe vt ſpatium ſpirale inſcriptum in primo circulo, ad ipſum. Quod &c.

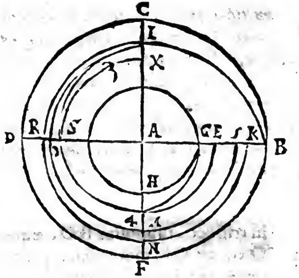
PROPOSITIO XIX.

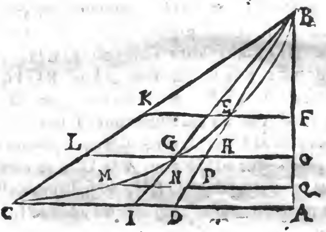
In ſchematibus prop. 17. exceſſus ſpatij ſpiralis GMSIBG, ſupra circulum radij AG, eſt æqualis in trilineo ſpatio comprehenſo à rectis CK, KE, & à curua CGE.

CVm enim probatum ſit in propoſit. 17. triangulum CBD, æquale fore circulo radij AB: & cum AB, BF, ſint æquales ſemidiametris BA, AG; facile probabimus, etiam triangulum kBE, æquale fore circulo radij AG. Sed totum ſpatium CBEGC, oſtenſum fuit æquale toti ſpatio ſpirali. Ergo etiam ſpatium CkEGC, erit æquale reliquo ſpatij ſpiralis dempto ab eo circulo radij AG. Quod &c.

PRO-

Digitized by Google





Digitized by Google

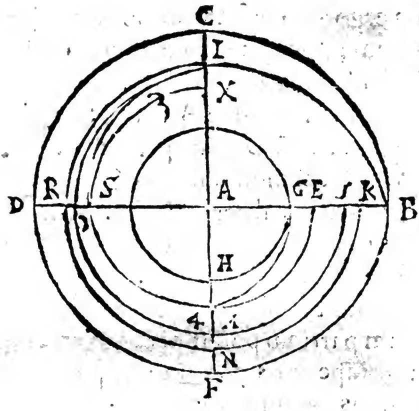
PROPOSITIO XX.

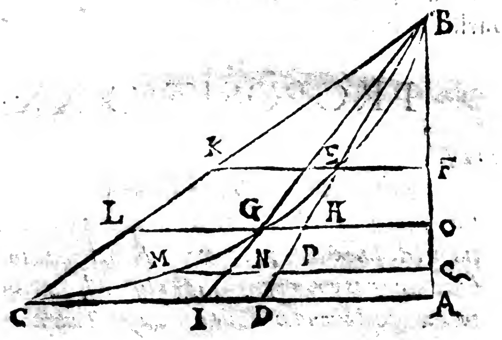
In Diagrammatiſmis propoſit. anteced. ſi in ſpirali accepto vbilibet puncto M, & ducta A M, centro A, interuallo A M, deſcribatur peripheria E M. Sector A M E, erit ad ſpatium ſpirale A M G A, quod comprehendit, vt factum ſub quadrato. E A, in differentiam poteſtatum E A, A G, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad tales partes differentiæ poteſtatum E A, A G, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

NAM in trilineo, ſuppoſita B O, æquali A E, & FO, ęquali GE, iam ex ſchol. pri. prop. 17. patet, trilineum G E H, in trilineo æquale eſſe exceſſui G M E G, & G H, æqualem fore circumferentiæ E M. Cum ergo etiam radius A E, ſit æqualis B O, altitudini trianguli G B H, (ducta prius recta B G.) Ergo triangulum B G H, erit æquale ſectori A E M: & erit ad trilineum G E H, vt ſector M A E, ad exceſſum ipſius ſupra ſpatium; nempe ad G M E G. Ergo & per conuerſionem rationis, erit ſector ad ſpatium A M G, à ſe comprehenſum, vt triangulum G B H, ad ſpatium GBEG. Sed ex propoſit. 14. triangulum eſt ad illud ſpatium in aſſignata ratione. Quare patet propoſitum.

SCHO-

Digitized by Google


C
I
X
D
R
S
A
G E
K
B
H
4
N
F


B
K
E
F
L
G
H
O
M
N
P
C
I
D
A

SCHOLIVM.

Etiam ergo in præſenti propoſitione licebit colligere ea omnia, quæ ſupra varijs vicibus fuerunt collecta. Nimirum in ſpirali lineari, eſſe ſectorem ad ſpatium, vt quadratum E A, ad rectangulum EAG, cum ⅓ quadrati E G. In quadratica, vt quadratum E A, ad rectangulum E A G, cum ½ quadrati G E. Et vniuerſaliter, eſſe ſectorem ad ſpatium, vt factum ſub quadrato E A, in omnes ſingulares partes adgregati poteſtatis E A, A G, vnius gradus inferioris poteſtate ſpiralis, ad tales partes omnium ſingularium partium poteſtatis adgregati EA, AG, vno gradu ſuperioris poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſas, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

PROPOSITIO XXI.

Si in ſchematibus propoſit. anteced. A B, B F, in trilineo ſint æquales K A, A G, in ſpirali; & circumferentia I R N K, ſit æqualis C D, in trilineo, item circumferentiam IR, lineæ CI, in trilineo, & DA, in trilineo æqualis tot integris circumferentijs radij A K, quotus eſt numerus reuolutionum vnitate minor. Trilineum C G I, in trilineo, erit æquale trilineo R I S, in ſpirali, quod eſt exceſſus ſectoris R A I circumſcripti ſpatio S A I, ſupra ipſum.

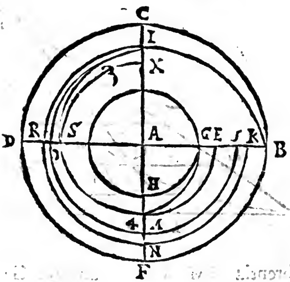
Etenim

ETenim, cum CI, linea in trilineo ſit æqualis circumferentiæ IR, in ſpirali, & AB, in trilineo æqualis ſemidiametro KA, ſeù RA, in ſpirali: triangulum CBI, erit æquale ſectori RAI. Tunc in RS, accipiatur quodlibet punctum 2, & deſcribatur circumferentia 23, ſemidiametro A2, occurrens ſpirali in 3; & facta in trilineo BQ, æquali A2, ſit MNPQ, parallela CA. Ad modum dictorum in propoſit. 17. deducemus, MNP, in trilineo æqualem fore circumferentiæ 3245, in ſpirali. Cum verò etiam NP, in trilineo ſit æqualis circumferentiæ 245, in ſpirali (quia ex hypotheſi, ID, eſt æqualis circumferentiæ RNk.) Ergo MN, in trilineo, erit æqualis circumferentiæ 23, in ſpirali. Quia verò RS, eſt æqualis OA; expertis in methodo indiuiſibilium patebit, omnes circumferentias trilinei RIS, in ſpirali concentricas circumferentiæ RI, æquales fore omnibus lineis trilinei CGI, parallelis CI. Ac proinde trilineum ipſum RIS, æquale fore trilineo CGI. Quod &c.

SCHOLIVM.

Cum verò ſupra probatum ſit, triangulum CBI, æquale eſſe ſectori RAI; ergo triangulum BCI, erit ad trilineum CGI, vt ſector RAI, ad trilineum RIS. Quare per conuerſionem rationis, erit ſector ad ſpatium SAI, quod includit, vt triangu-

lum



quoque poſſe de partibus proportionalibus. Non enim tantum totus exceſſus æquabitur toto trilineo CGED. Sed etiam pars clauſa peripheria BCDFB, ſpirali BISM, peripheria ME, & recta EB, erit æqualis quadrilatero CGHD. Item reliqua pars GMEG, æqualis trilineo EGH. Idem dicatur de cæteris partibus proportionalibus.

SCHOLIVM II.

Ergo per conuerſionem rationis, erit circulus ad ipſum ſpirale ſpatium, vt triangulum CBD, ad ſpatium comprehenſum rectis CB, BE, & curua CGE.

Cum

Cum verò ex propoſit. 14. ſit triangulum CBD, ad illud ſpatium, vt factum ſub differentia poteſtatum AB, BF, vno gradu depreſſiorum poteſtate trilinei (nempe eiuſdem gradus cum ſpirali) in quadratum BA, ad tales partes differentiæ poteſtatum AB, BF, vno gradu ſuperiorum poteſtate trilinei (nempe duplici gradu ſuperiorum poteſtate ſpiralis,) quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus (nempe vt numerus gradus ſpiralis) ad numerum trilinei vnitate auctum (nempe ad numerum gradus ſpiralis binario auctum.) Ergo etiam circulus radij AB, erit ad ſpatium ſpirale GMSIBG, vt factum ſub differentia poteſtatum BA, AG, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum BA, ad tales partes differentiæ poteſtatum BA, AG, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad dictam differentiam, vt numerus gradus ſpiralis ad ipſum binario auctum.

SCHOLIVM III.

Immo ex ſchol. citat. propoſit. 14. poterimus alias compendioſiores rationes aſſignare. Nam in ſpirali lineari deducemus, eſſe circulum ad ſpatium, vt quadratum BA, ad rectangulum BAG, cum $\frac{1}{3}$ quadrati BG. In quadratica, vt idem quadratum BA, ad idem rectangulum BAG, cum $\frac{1}{5}$ quadrati GB. Et vniuerſaliter deducemus, eſſe circulum ad ſpatium, vt factum ſub quadrato AB, in omnes ſingulares

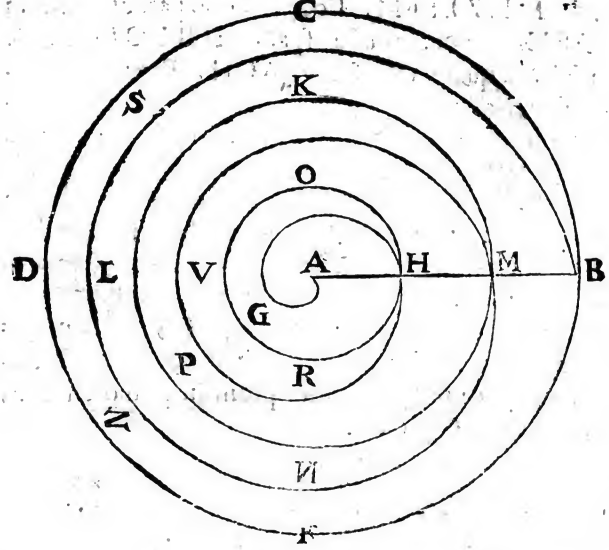
lares partes poteſtatis adgregati AB, AG, vnius gradus inferioris, gradu ſpiralis, ad tales partes omnium ſingularium partium poteſtatis adgregati AB, AG, vno gradu altioris poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſas, vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

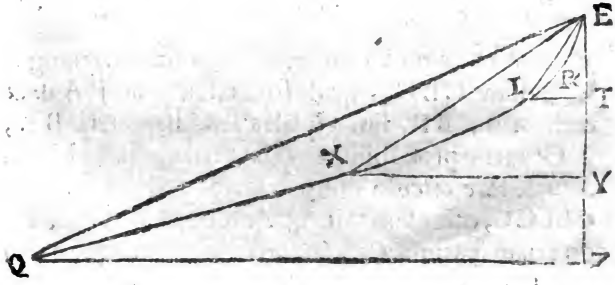
PROPOSITIO XVIII.

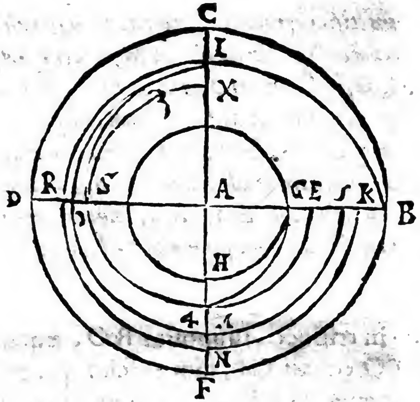
Omnia ſpatia ſpiralia ſucceſſiuè inſcripta in quibuslibet circulis ſimul ſumpta, ſunt ad tot circulos maiores quotus eſt numerus reuolutionum, vt numerus gradus ſpiralis ad numerum binario auctum.

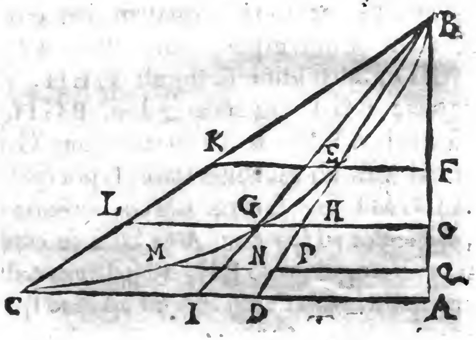
SInt quælibet ſpatia ſpiralia AGH, HRPM, MNLSB, inſcripta in circulis radiorum AH, AM, AB. Dico omnia illa ſpatia ſimul ſumpta eſſe ad tot circulos radij AB, quotus eſt numerus reuolutionum (nempe in noſtro caſu ad tres) vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum. Nempe in prim. vt 1. ad 3. In ſecund. vt 2. ad 4. vt 3. ad 5. &c.

Sit etiam triangulum QEZ, cum ſibi inſcripto trilineo parabolico QEZ, gradus congruentis gradui ſpiralis; ſitque talis indolis, vt ZE, YE, ET, ſint æquales AB, AM, AH; & QZ, ſit æqualis tot peripherijs BFDC, quotus eſt numerus reuolutionum. Ergo ex propoſit. anteced. ſpatium contentum rectis QE, EX, & curua QX, erit æquale ſpatio ſpirali


C
K
S
O
D
L
V
A
H
M
B
G
P
R
Z
N
F


E
L
R
T
X
Y
Q
Z


C
L
X
R
S
A
GE
K
D
B
H
4
N
F

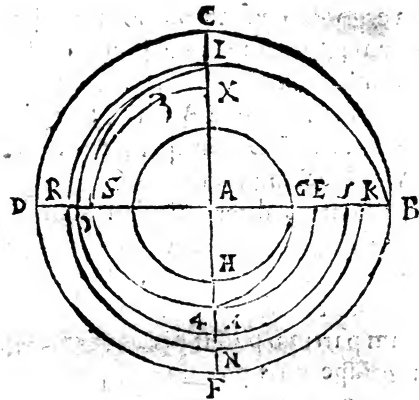

B
K
E
F
L
G
H
O
M
N
P
Q
C
I
D
A

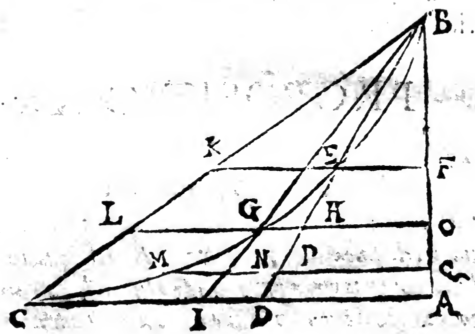
PROPOSITIO XX.

In Diagrammatiſmis propoſit. anteced. ſi in ſpirali accepto vbilibet puncto M, & ducta A M, centro A, interuallo A M, deſcribatur peripheria E M. Sector A M E, erit ad ſpatium ſpirale A M G A, quod comprehendit, vt factum ſub quadrato. E A, in differentiam poteſtatum E A, A G, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad tales partes differentiæ poteſtatum E A, A G, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

NAM in trilineo, ſuppoſita B O, æquali A E, & FO, ęquali GE, iam ex ſchol. pri. prop. 17. patet, trilineum G E H, in trilineo æquale eſſe exceſſui G M E G, & G H, æqualem fore circumferentiæ E M. Cum ergo etiam radius A E, ſit æqualis B O, altitudini trianguli G B H, (ducta prius recta B G.) Ergo triangulum B G H, erit æquale ſectori A E M: & erit ad trilineum G E H, vt ſector M A E, ad exceſſum ipſius ſupra ſpatium; nempe ad G M E G. Ergo & per conuerſionem rationis, erit ſector ad ſpatium A M G, à ſe comprehenſum, vt triangulum G B H, ad ſpatium G B E G. Sed ex propoſit. 14. triangulum eſt ad illud ſpatium in aſſignata ratione. Quare patet propoſitum.

SCHO-


C
I
X
D
R
S
A
G E
K
B
H
4
N
F


B
K
E
F
L
G
H
O
M
N
P
Q
C
I
D
A

SCHOLIVM.

Etiam ergo in præſenti propoſitione licebit colligere ea omnia, quæ ſupra varijs vicibus fuerunt collecta. Nimirum in ſpirali lineari, eſſe ſectorem ad ſpatium, vt quadratum E A, ad rectangulum EAG, cum $\frac{1}{3}$ quadrati E G. In quadratica, vt quadratum E A, ad rectangulum E A G, cum $\frac{1}{2}$ quadrati G E. Et vniuerſaliter, eſſe ſectorem ad ſpatium, vt factum ſub quadrato E A, in omnes ſingulares partes adgregati poteſtatis E A, A G, vnius gradus inferioris poteſtate ſpiralis, ad tales partes omnium ſingularium partium poteſtatis adgregati E A, A G, vno gradu ſuperioris poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſas, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

PROPOSITIO XXI.

Si in ſchematibus propoſit. anteced. A B, B F, in trilineo ſint æquales K A, A G, in ſpirali; & circumferentia I R N K, ſit æqualis C D, in trilineo, item circumferentiam I R, lineæ C I, in trilineo, & D A, in trilineo æqualis tot integris circumferentijs radij A K, quotus eſt numerus reuolutionum unitate minor. Trilineum C G I, in trilineo, erit æquale trilineo R I S, in ſpirali, quod eſt exceſſus ſectoris R A I circumſcripti ſpatio S A I, ſupra ipſum.

Etenim

ETenim, cum CI, linea in trilineo ſit æqualis circumferentiæ IR, in ſpirali, & AB, in trilineo æqualis ſemidiametro KA, ſeù RA, in ſpirali: triangulum CBI, erit æquale ſectori RAI. Tunc in RS, accipiatur quodlibet punctum 2, & deſcribatur circumferentia 23, ſemidiametro A2, occurrens ſpirali in 3; & facta in trilineo BQ, æquali A2, ſit MNPQ, parallela CA. Ad modum dictorum in propoſit. 17. deducemus, MNP, in trilineo æqualem fore circumferentiæ 3245, in ſpirali. Cum verò etiam NP, in trilineo ſit æqualis circumferentiæ 245, in ſpirali (quia ex hypotheſi, ID, eſt æqualis circumferentiæ RNk.) Ergo MN, in trilineo, erit æqualis circumferentiæ 23, in ſpirali. Quia verò RS, eſt æqualis OA; expertis in methodo indiuiſibilium patebit, omnes circumferentias trilinei RIS, in ſpirali concentricas circumferentiæ RI, æquales fore omnibus lineis trilinei CGI, parallelis CI. Ac proinde trilineum ipſum RIS, æquale fore trilineo CGI. Quod &c.

SCHOLIVM.

Cum verò ſupra probatum ſit, triangulum CBI, æquale eſſe ſectori RAI; ergo triangulum BCI, erit ad trilineum CGI, vt ſector RAI, ad trilineum RIS. Quare per conuerſionem rationis, erit ſector ad ſpatium SAI, quod includit, vt triangu-

lum

lum C B I, ad ſpatium C B G C. Cum ergo ex propoſit. 14. ſit triangulum C B I, ad ſpatium, vt factum ſub quadrato A B, in differentiam poteſtatum A B, B O, vnius gradus inferioris poteſtate trilinei (nempe eiuſdem gradus cum ſpirali) ad differentiam poteſtatum A B, B O, vnius gradus ſuperioris poteſtate trilinei (nempe duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis;) ſic etiam erit ſector R A I, ad ſpatium ſpirale. Nempe erit ad ipſum, vt factum ſub quadrato R A, in differentiam poteſtatum R A, A S, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad differentiam poteſtatum R A, A S, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis.

Cum ergo proportio reperta inter ſectorem, & ſpatium, ſit ſimilis aliqualiter ſupra repertis, patebit omnia compendia varijs vicibus ſupra explicata, poſſe etiam aſſignari in præſenti. Verum ergo erit etiam in preſenti, quod in ſpirali lineari, erit ſector ad ſpatium, vt quadratum R A, ad rectangulum R A S, cum $\frac{1}{3}$ quadrati R S. Item in ſpirali quadratica, erit ſector ad ſpatium, vt quadratum R A, ad rectangulum R A S, cum $\frac{1}{2}$ quadrati R S. Pariter vniuerſaliter poterimus pronunciare. Eſſe ſectorem ad ſpatium, vt factum ſub quadrato R A, in omnes ſingulares partes adgregati poteſtatis R A, A S, vnius gradus inferioris poteſtate ſpiralis, ad tales partes omnium ſingularium partium poteſtatis adgregati R A, A S, vno gradu ſuperioris poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſas, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Omnia ſpatia ſpiralia ſucceſſiue inſcripta in quibuslibet circulis ſimul ſumpta, vna cum quolibet ſegmento ſpatij reuolutionis vnitate maioris inſcripto in inſectore, ſunt ad tot integros circulos ſectoris quotus eſt numerus ſpatiorum integrorum, vna cum ipſo ſectore, vt numerus gradus ſpiralis ad numerum binario auctum.

IN ſchematibus propoſit. anteced. ſupponamus circulum radij AG, eſſe circulum circumſcriptum ſpatio ſpirali cuiuſcumque reuolutionis, v.g. ſecundæ, ita vt intra ipſum intelligendus ſit circulus primus circumſcriptus ſpatio primæ reuolutionis: ſit etiam circulus radij AB, circumſcriptus ſpatio tertiæ reuolutionis: & centro A, interuallo quolibet AE, intelligatur ſector MAE, circumſcriptus MAG, ſegmento ſpatij tertiæ reuolutionis. Dico omnia ſpatia ſpiralia ſucceſſiue (nempe in caſu noſtro primæ, & ſecundæ reuolutionis) vna cum ſegmento MAG, eſſe ad tot integros circulos radij AE, quotus eſt numerus ſpatiorum integrorum (nempe in caſu noſtro ad duos) vna cum ſectore MAE, vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

Supponamus enim trilineum ſæpe dictum CBA, & C. eſſe talis indolis, vt AB, ſit æqualis AE, in ſpirali, & BF, ſit æqualis AG: item AD, ſit æqualis

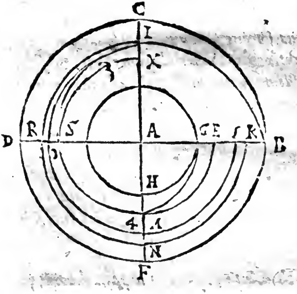
lis duabus circumferentijs radij AE, & CD, ſit æqualis circumferentiæ EM. Facile patebit, triangulum CBD, æquale eſſe ſectori MAE; & totum triangulum CBA, æquale eſſe duobus circulis radij AE, & ſectori MAE: item ex propoſit. anteced. facile patebit, in trilineo trilineum mixtum CGED, æquale eſſe in ſpirali trilineo GME: & CBEC, in trilineo, æquale eſſe MAG, in ſectori. Pariter ad modum propoſit. 18. patebit, ſpatium EB, in trilineo æquale eſſe alijs duobus ſpatijs ſpiralibus incluſis intra circulum radij AG, & alium ipſi incluſum (licet enim ſchema non exprimet, facile hoc percipietur ſi conſideremus circulum radij AG, in præſenti gerere vicem circuli radij AM, in dicta propoſit. 18.) Quare manifeſte patebit, duos circulos radij AE, vna cum ſectore AME, eſſe ad primum, & ſecundum ſpatium ſpirale, vna cum ſegmento MAG, vt triangulum CBA, ad exceſſum ipſius ſupra trilineum. Nempe ex ſæpe dictis; vt numerus gradus ſpiralis binario auctus, ad numerum. Nempe vt circulus circumſcriptus primo ſpatio ad ipſum. Quare conuertendo, patet propoſitum. Quod &c.

PROPOSITIO XXIII.

Si in ſpatio anteced. propoſit. ſemidiametro minori linea inſcribatur ſector SAX. Erit RIS, trilineum, exceſſus ſectoris maioris ſupra ſpatium, ad SIX, trilineum, exceſſum ſpatij ſupra minorem ſectorem, vt exceſſus facti

ſub

ſub differentia poteſtatum R A, A S, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum R A, ſupra tales partes differentiæ poteſtatum R A, S A, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad dictam differentiam, vt numerus ſpiralis ad eundem numerum binario auctum, ad exceſſum prædictarum partium differentiæ poteſtatum R A, S A, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, ſupra factum ſub differentia poteſtatum R A, A S, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum S A.



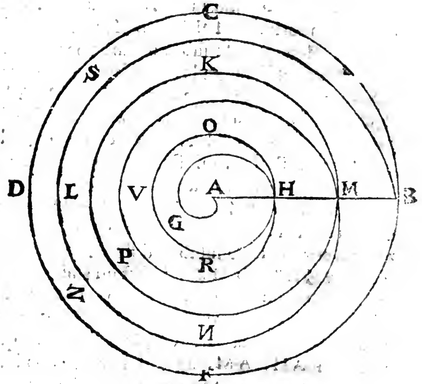
HÆc demonſtratio erit ſimilis traditæ in propoſit. 13. quæ ideo ex ipſa petenda eſt. Immo omnia compendia deducta in ſchol. eiuſdem, poterimus deducere etiam in præſenti. Verum ergo

etiam erit nunc, eſſe in ſpirali lineari, RIS, ad SIX, vt RA, cum $\frac{2}{3}$ RS, ad SA, cum $\frac{1}{3}$ RS. Item in ſpirali quadratica, RIS, SIX, ęqualia eſſe. Et in alijs ſpiralibus poterimus forſitan reperire alia compendia, quæ lector poterit proprio Marte excogitare.

PROPOSITIO XXIV.

Primi circuli ſpatium helicum cuiuſcunque gradus, ad ſpatium helicum ſecundi circuli, eſt vt factum ſub tali parte quadrati radij primi circuli, quæ ſe habeat ad ipſum, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum, & ſub differentia poteſtatum radiorum primi, & ſecundi circuli, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad tales partes differentiæ poteſtatum horum radiorum duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum. Spatium vero ſecundi circuli ad ſpatium tertium, eſt vt factum ex hoc ſecundo facto, & ex differentia poteſtatum radiorum tertij, & ſecundi circuli eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimile factum ſub ſimili parte differentiæ poteſtatum radiorum ſecundi, & tertij circuli, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, & ſub differentia radiorum primi, & ſecundi circuli eiuſdem gradus cum ſpirali, & ſic deinceps in reliquis.

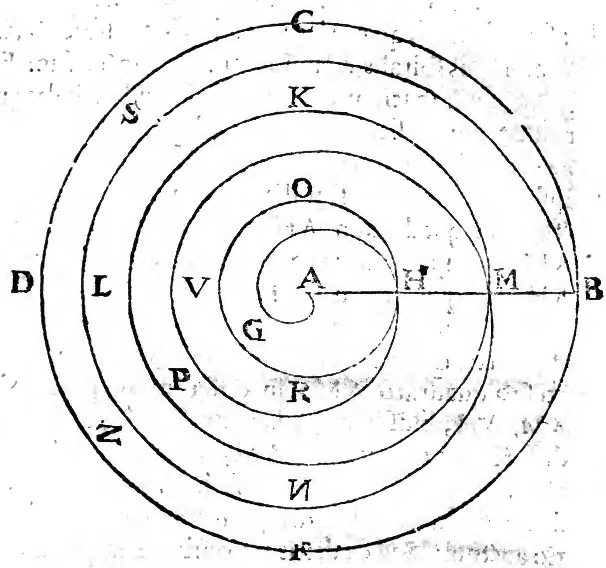
SIt primum ſpatium helicum cuiuſcunque gradus AGH, cum primo circulo radij AH: item



item ſecundum ſpatium HRPMH, cum ſecundo circulo radij AM: item tertium cum tertio circulo radij AB. Dico primum ſpatium AGH, eſſe ad ſecundum ſpatium HRPMH, vt factum ſub tali parte quadrati AH, quæ ſe habeat ad ipſum, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum, & ſub differentia poteſtatum MA, AH, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad talem partem differentiæ poteſtatum MA, AH, duplici gradu altiorum poteſtate

ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum. Spatium ſecundum ad ſpatium tertium MNZLSBM, vt factum ſub hoc ſecundo facto, & ſub differentia poteſtatum BA, AM, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad factum ſub ſimili parte differentiæ poteſtatum BA, AM, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, & ſub differentia poteſtatum MA, AH, eiuſdem gradus cum ſpirali. Et ſic in infinitum. V. g. in ſpirali lineari erit primum ſpatium ad ſecundum, vt factum ſub [illegible] quadrati AH, in HM, ad $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum AH, AM. Secundum vero ſpatium ad tertium erit, vt factum ſub $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum AH, AM, & ſub MB, ad factum ſub $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum AM, AB, & ſub HM. In ſpirali quadratica, erit primum ſpatium ad ſecundum, vt factum ſub $\frac{2}{3}$ quadrati AH, in differentiam quadratorum AH, AM, ad $\frac{2}{4}$ differentiæ quadrato quadratorum AH, AM. Secundum ſpatium erit ad tertium, vt factum ſub dicta parte differentiæ, & ſub differentia quadratorum AB, AM, ad factum ſub $\frac{2}{4}$ differentiæ quadrato quadratorum AM, AB; & ſub differentia quadratorum MA, AH; & ſic in alijs. Primum enim ſpatium AGH, ad ſecundum ſpatium HRPMH, habet rationem compoſitam ex ratione ipſius ad primum circulum radij AH; huius, ad ſecundum circulum radij AM; & huius, ad ſecundum ſpatium. Primum ſpatium ad primum circulum eſt, vt numerus gradus ſpiralis ad

nume-



numerum binario auctum ex coroll. propoſit. 9. nempe vt talis pars quadrati A H, quæ ſe habeat ad ipſum, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum, ad ipſum quadratum A H. Circulus radij A H, ad circulum radij A M, eſt vt quadratum A H, ad quadratum radij A M. Circulus radij A M, eſt ad ſpatium ſecundum helicum, quod comprehendit, ex ſchol. 2. propoſit. 17. vt factum ſub quadrato A M, in differentiam poteſtatum M A, A H, eiuſdem

SCHOLIVM.

Etiam ergo in præſenti propoſitione licebit colligere ea omnia, quæ ſupra varijs vicibus fuerunt collecta. Nimirum in ſpirali lineari, eſſe ſectorem ad ſpatium, vt quadratum EA, ad rectangulum EAG, cum $\frac{1}{3}$ quadrati EG. In quadratica, vt quadratum EA, ad rectangulum EAG, cum $\frac{2}{3}$ quadrati GE. Et vniuerſaliter, eſſe ſectorem ad ſpatium, vt factum ſub quadrato EA, in omnes ſingulares partes adgregati poteſtatis EA, AG, vnius gradus inferioris poteſtate ſpiralis, ad tales partes omnium ſingularium partium poteſtatis adgregati EA, AG, vno gradu ſuperioris poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſas, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

PROPOSITIO XXI.

Si in ſchematibus propoſit. anteced. AB, BF, in trilineo ſint æquales KA, AG, in ſpirali; & circumferentia IRNk, ſit æqualis CD, in trilineo, item circumferentiam IR, lineæ CI, in trilineo, & DA, in trilineo æqualis tot integris circumferentijs radij Ak, quotus eſt numerus reuolutionum vnitate minor. Trilineum CGI, in trilineo, erit æquale trilineo RIS, in ſpirali, quod eſt exceſſus ſectoris RAI circumſcripti ſpatio SAI, ſupra ipſum.

Etenim

ETenim, cum C I, linea in trilineo ſit æqualis circumferentiæ I R, in ſpirali, & A B, in trilineo æqualis ſemidiametro K A, ſeù R A, in ſpirali: triangulum C B I, erit æquale ſectori R A I. Tunc in R S, accipiatur quodlibet punctum 2, & deſcribatur circumferentia 23, ſemidiametro A 2, occurrens ſpirali in 3; & facta in trilineo B Q, æquali A 2, ſit M N P Q, parallela C A. Ad modum dictorum in propoſit. 17. deducemus, M N P, in trilineo æqualem fore circumferentiæ 3245, in ſpirali. Cum verò etiam N P, in trilineo ſit æqualis circumferentiæ 245, in ſpirali (quia ex hypotheſi, I D, eſt æqualis circumferentiæ R N k.) Ergo M N, in trilineo, erit æqualis circumferentiæ 23, in ſpirali. Quia verò R S, eſt æqualis O A; expertis in methodo indiuiſibilium patebit, omnes circumferentias trilinei R I S, in ſpirali concentricas circumferentiæ R I, æquales fore omnibus lineis trilinei C G I, parallelis C I. Ac proinde trilineum ipſum R I S, æquale fore trilineo C G I. Quod &c.

SCHOLIVM.

Cum verò ſupra probatum ſit, triangulum C B I, æquale eſſe ſectori R A I; ergo triangulum B C I, erit ad trilineum C G I, vt ſector R A I, ad trilineum R I S. Quare per conuerſionem rationis, erit ſector ad ſpatium S A I, quod includit, vt triangu-

PROPOSITIO XXII.

Omnia ſpatia ſpiralia ſucceſſiue inſcripta in quibuslibet circulis ſimul ſumpta, vna cum quolibet ſegmento ſpatij reuolutionis vnitate maioris inſcripto in inſectore, ſunt ad tot integros circulos ſectoris quotus eſt numerus ſpatiorum integrorum, vna cum ipſo ſectore, vt numerus gradus ſpiralis ad numerum binario auctum.

IN ſchematibus propoſit. anteced. ſupponamus circulum radij AG, eſſe circulum circumſcriptum ſpatio ſpirali cuiuſcumque reuolutionis, v. g. ſecundæ, ita vt intra ipſum intelligendus ſit circulus primus circumſcriptus ſpatio primæ reuolutionis: ſit etiam circulus radij AB, circumſcriptus ſpatio tertiæ reuolutionis: & centro A, interuallo quolibet AE, intelligatur ſector MAE, circumſcriptus MAG, ſegmento ſpatij tertiæ reuolutionis. Dico omnia ſpatia ſpiralia ſucceſſiue (nempe in caſu noſtro primæ, & ſecundæ reuolutionis) vna cum ſegmento MAG, eſſe ad tot integros circulos radij AE, quotus eſt numerus ſpatiorum integrorum (nempe in caſu noſtro ad duos) vna cum ſectore MAE, vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

Supponamus enim trilineum ſæpe dictum CBA, & C. eſſe talis indolis, vt AB, ſit æqualis AE, in ſpirali, & BF, ſit æqualis AG: item AD, ſit æqua-

lis

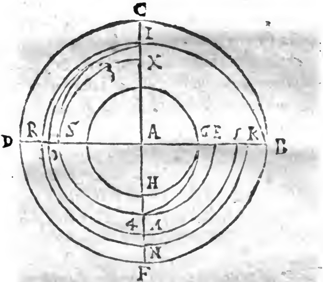
lis duabus circumferentijs radij AE, & CD, ſit æqualis circumferentiæ EM. Facile patebit, triangulum CBD, æquale eſſe ſectori MAE; & totum triangulum CBA, æquale eſſe duobus circulis radij AE, & ſectori MAE: item ex propoſit. anteced. facile patebit, in trilineo trilineum mixtum CGED, æquale eſſe in ſpirali trilineo GME: & CBEC, in trilineo, æquale eſſe MAG, in ſectori. Pariter ad modum propoſit. 18. patebit, ſpatium EB, in trilineo æquale eſſe alijs duobus ſpatijs ſpiralibus incluſis intra circulum radij AG, & alium ipſi incluſum (licet enim ſchema non exprimet, facile hoc percipietur ſi conſideremus circulum radij AG, in præſenti gerere vicem circuli radij AM, in dicta propoſit. 18.) Quare manifeſte patebit, duos circulos radij AE, vna cum ſectore AME, eſſe ad primum, & ſecundum ſpatium ſpirale, vna cum ſegmento MAG, vt triangulum CBA, ad exceſſum ipſius ſupra trilineum. Nempe ex ſæpe dictis, vt numerus gradus ſpiralis binario auctus, ad numerum. Nempe vt circulus circumſcriptus primo ſpatio ad ipſum. Quare conuertendo, patet propoſitum. Quod &c.

PROPOSITIO XXIII.

Si in ſpatio anteced. propoſit. ſemidiametro minori linea inſcribatur ſector SAX. Erit RIS, trilineum, exceſſus ſectoris maioris ſupra ſpatium, ad SIX, trilineum, exceſſum ſpatij ſupra minorem ſectorem, vt exceſſus facti

ſub

ſub differentia poteſtatum RA, AS, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum RA, ſupra tales partes differentiæ poteſtatum RA, SA, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad dictam differentiam, vt numerus ſpiralis ad eundem numerum binario auctum, ad exceſſum prædictarum partium differentiæ poteſtatum RA, SA, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, ſupra factum ſub differentia poteſtatum RA, AS, eiuſdem gradus cum ſpirali, in quadratum SA.



HÆc demonſtratio erit ſimilis traditæ in propoſit. 13. quæ ideo ex ipſa petenda eſt. Immo omnia compendia deducta in ſchol. eiuſdem, poterimus deducere etiam in præſenti. Verum ergo

 etiam

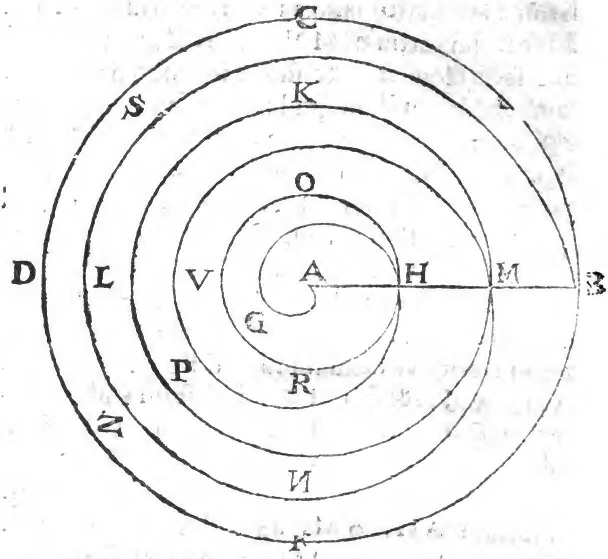
Digitized by Google

etiam erit nunc, eſſe in ſpirali lineari, RIS, ad SIX, vt RA, cum $\frac{2}{3}$ RS, ad SA, cum $\frac{1}{3}$ RS. Item in ſpirali quadratica, RIS, SIX, ęqualia eſſe. Et in alijs ſpiralibus poterimus forſitan reperire alia compendia, quæ lector poterit proprio Marte excogitare.

PROPOSITIO XXIV.

Primi circuli ſpatium helicum cuiuſcunque gradus, ad ſpatium helicum ſecundi circuli, eſt vt factum ſub tali parte quadrati radij primi circuli, quæ ſe habeat ad ipſum, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum, & ſub differentia poteſtatum radiorum primi, & ſecundi circuli, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad tales partes differentiæ poteſtatum horum radiorum duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum. Spatium vero ſecundi circuli ad ſpatium tertium, eſt vt factum ex hoc ſecundo facto, & ex differentia poteſtatum radiorum tertij, & ſecundi circuli eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimile factum ſub ſimili parte differentiæ poteſtatum radiorum ſecundi, & tertij circuli, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, & ſub differentia radiorum primi, & ſecundi circuli eiuſdem gradus cum ſpirali, & ſic deinceps in reliquis.

SIt primum ſpatium helicum cuiuſcunque gradus AGH, cum primo circulo radij AH: item

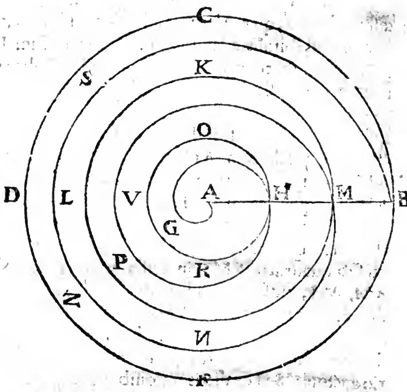


item ſecundum ſpatium HRPMH, cum ſecundo circulo radij AM: item tertium cum tertio circulo radij AB. Dico primum ſpatium AGH, eſſe ad ſecundum ſpatium HRPMH, vt factum ſub tali parte quadrati AH, quæ ſe habeat ad ipſum, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum, & ſub differentia poteſtatum MA, AH, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad talem partem differentiæ poteſtatum MA, AH, duplici gradu altiorum poteſtate

 ſpi-

ſpiralis, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum. Spatium ſecundum ad ſpatium tertium MNZLSBM, vt factum ſub hoc ſecundo facto, & ſub differentia poteſtatum BA, AM, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad factum ſub ſimili parte differentiæ poteſtatum BA, AM, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, & ſub differentia poteſtatum MA, AH, eiuſdem gradus cum ſpirali. Et ſic in infinitum. V. g. in ſpirali lineari erit primum ſpatium ad ſecundum, vt factum ſub [illegible] quadrati AH, in HM, ad $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum AH, AM. Secundum vero ſpatium ad tertium erit, vt factum ſub $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum AH, AM, & ſub MB, ad factum ſub $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum AM, AB, & ſub HM. In ſpirali quadratica, erit primum ſpatium ad ſecundum, vt factum ſub $\frac{2}{4}$ quadrati AH, in differentiam quadratorum AH, AM, ad $\frac{2}{4}$ differentiæ quadrato quadratorum AH, AM. Secundum ſpatium erit ad tertium, vt factum ſub dicta parte differentiæ, & ſub differentia quadratorum AB, AM, ad factum ſub $\frac{2}{4}$ differentiæ quadrato quadratorum AM, AB; & ſub differentia quadratorum MA, AH; & ſic in alijs. Primum enim ſpatium AGH, ad ſecundum ſpatium HRPMH, habet rationem compoſitam ex ratione ipſius ad primum circulum radij AH; huius, ad ſecundum circulum radij AM; & huius, ad ſecundum ſpatium. Primum ſpatium ad primum circulum eſt, vt numerus gradus ſpiralis ad

nume-



numerum binario auctum ex coroll. propoſit. 9. nempe vt talis pars quadrati A H, quæ ſe habeat ad ipſum, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum, ad ipſum quadratum A H. Circulus radij A H, ad circulum radij A M, eſt vt quadratum A H, ad quadratum radij A M. Circulus radij A M, eſt ad ſpatium ſecundum helicum, quod comprehendit, ex ſchol. 2. propoſit. 17. vt factum ſub quadrato A M, in differentiam poteſtatum M A, A H, eiuſ-

dem

Digitized by Google

dem gradus cum ſpirali, ad talem partem differentiæ poteſtatum MA, AH, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, quæ ſe habeat ad ipſam differentiam, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum. Ergo primum ſpatium helicum ad ſecundum habet rationem compoſitam ex omnibus his rationibus. Sed ex rationibus partis quadrati AH, quæ ſe habeat ad ipſum, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum, ad quadratum AH, & huius ad quadratum AM, componitur ratio prædictæ partis quadrati AH, ad quadratum AM. Ergo ratio primi ſpatij ad ſecundum, erit tantum compoſita ex ratione dictæ partis quadrati AH, ad quadratum AM, & facti ſub quadrato AM, in differentiam poteſtatum AM, AH, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad partem differentiæ poteſtatum AM, AH, duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, ſe habentem ad dictam differentiam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum. Sed ex dictis rationibus componitur ratio facti ſub dicta parte quadrati AH, in factum ſub quadrato AM, in differentiam poteſtatum AM, AH, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad factum ſub quadrato AM, in dictam partem differentiæ poteſtatum AM, AH, duplici gradu ſuperiorum poteſtate ſpiralis. Ergo primum ſpatium erit ad ſecundum in præfata ratione. Sed cum in ambobus terminis proportionis reperiatur quadratum AM, ſi poteſtates terminorum deprimantur, erit primum ſpatium ad ſecundum, vt factum ſub dicta parte qua-

drati A H, in differentiam poteſtatum M A, A H, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad ſimilem partem differentiæ poteſtatum A H, A M, duplici gradu ſuperiorum poteſtate ſpiralis. Quod primo erat oſtendendum.

Quod verò ratio ſecundi ſpatij ad tertium ſit ea, quæ ſupra dicta fuit, probabitur ferè eodem modo. Nam ratio ſecundi ſpatij ad tertium componitur ex ratione ipſius ad ſecundum circulum; huius ad tertium; & tertij circuli ad tertium ſpatium. Ratio ſecundi ſpatij ad ſecundum circulum eſt, vt pars differentiæ poteſtatum A H, A M, duplici gradu ſuperiorum poteſtate ſpiralis, ſe habens ad ipſam differentiam, vt numerus gradus ſpiralis ad numerum binario auctum, ad factum ſub quadrato A M, in differentiam poteſtatum A M, A H, eiuſdem gradus cum ſpirali, ex ſchol. 2. propoſit. 15. Ratio circuli radij A M, ad circulum radij A B, eſt vt quadratum A M, ad quadratum A B. Ratio circuli radij A B, ad tertium ſpatium eſt, vt factum ſub quadrato A B, in differentiam poteſtatum A B, A M, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad partem differentiæ poteſtatum A B, A M, duplici gradu ſuperiorum poteſtate ſpiralis, ſe habentem ad dictam differentiam, vt numerus ad numerum binario auctum ex ſchol. citat. Ergo ratio ſecundi ſpatij ad tertium componetur ex omnibus antecedentibus ad omnia conſequentia: nempe erit, vt factum ſub omnibus antecedentibus ad factum ſub omnibus conſequentibus. Sed tam in facto ex

omni-

omnibus antecedentibus, quam in facto ex omnibus conſequentibus reperitur factum ſub quadratis AM, AB. Si ergo tam factum ſub omnibus antecedentibus, quam factum ſub omnibus conſequentibus deprimatur, nempe auferatur ab ipſis facta ſub quadratis AM, AB, nihilominus ſeruabitur eadem proportio. Erit ergo à primo ad vltimum, ſecundum ſpatium ad tertium ſpatium, vt factum ſub parte differentiæ poteſtatum AH, AM, duplici gradu ſuperiorum poteſtate ſpiralis, ſe habente ad ipſam differentiam, vt numerus ſpiralis ad numerum binario auctum, & ſub differentia poteſtatum BA, AM, eiuſdem gradus cum ſpirali, ad factum ſub parte ſimili priori differentiæ poteſtatum duplici gradu altiorum ſpirali, ipſarum BA, AM, & ſub differentia poteſtatum MA, AH, eiuſdem gradus cum ſpirali. Quod ſecundo erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

Etiam in præſenti harum proportionum ſunt reperibilia compendia. Sed quia proportio ſpatiorum ſpiralium inter ſe poteſt expiſcari iucundius ex analogia reperta inter dicta ſpatia, & trilinea parabolica, ideo hæc explicanda prius ſunt, poſtea ipſa compendia aſſignabimus.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

Si quodlibet ex infinitis trilineis parabolicis ſecetur linea baſi parallela, & tam toto trilineo, quam trilineo ad verticem circumſcribantur triangula. Erit exceſſus trianguli circumſcripti toto trilineo ſupra ipſum, ad exceſſum trianguli circumſcripti trilineo ad verticem ſupra ipſum, vt poteſtas diametri trilinei vno gradu altior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem diametri trilinei ad verticem.

ESto quodlibet trilineum parabolicum QXEZ, cum ſibi circumſcripto triangulo QEZ, & ſit ducta XY, parallela baſi QX, & trilineo ad verticem XEY, ſit circumſcriptum triangulum XEY. Dico ſpatium comprehenſum à recta, & curua QE, eſſe ad ſpatium comprehenſum à recta, & curua XE, vt poteſtas ZE, vno gradu altior poteſtate trilinei ad ſimilem poteſtatem YE. V.g. in quadratico, vt cubus, ad cubum. In cubico, vt quadratoquadratum ad quadratoquadratum, & ſic in infinitum. Hæc propoſitio oſtenſa fuit in ſchol. pri. propoſit. 3. lib. pri. de Infinit. Parab. ex eo quod trilinea ſint eiuſdem rationis. Cum ergo eandem habeat rationem tam triangulum ad triangulum, quam trilineum ad trilineum, quam exceſſus trianguli ſupra trilineum, ad exceſſum trianguli ſupra trilineum; & triangulum QEZ, ſit ad triangulum XEY, vt poteſtas ZE, vno gradu altior poteſtate

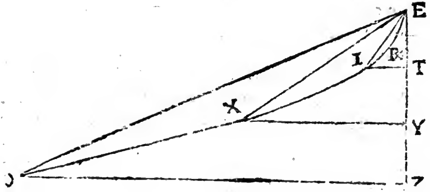
M trili-

trilinei ad ſimilem poteſtatem EY (quia hæc ratio componitur ex ratione QZ, ad XY; nempe ex ratione poteſtatis ZE, eiuſdem gradus cum trilineo, ad ſimilem poteſtatem EY, & ex ratione ZE, ad EY: quæ duæ componunt rationem poteſtatis EZ, vno gradu altioris poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem EY;) erit etiam exceſſus trianguli QEZ, ſupra ſuum trilineum, ad exceſſum trianguli XEY, ſupra ſuum trilineum, vt poteſtas ZE, vno gradu altior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem EY. Quod &c.

SCHOLIVM.

Deducemus ergo diuidendo, eſſe ſpatium QEXQ, ad ſpatium XEX, vt differentia poteſtatum ZE, EY, vno gradu ſuperiorum poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem EY. Quod ſi iterum ducta IT, parallela XY, fiat triangulum IET; erit exceſſus XEI, ad exceſſum IEI, vt poteſtas YE, vno gradu altior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem ET. Et diuidendo, erit exceſſus XEIX, ad IEI, vt differentia poteſtatum dictarum YE, ET, ad ſimilem poteſtatem ET. Erit ergo etiam ſpatium QEXQ, ad ſpatium XEIX, vt differentia poteſtatum ZE, EY, vno gradu altiorum poteſtate trilinei, ad differentiam ſimilium poteſtatum YE, ET.

Si ergo ſupponamus QEZ, eſſe trilineum parabo-

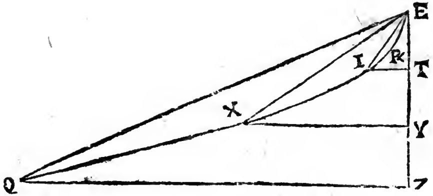


rabolicum quadraticum, & ET, TY, YZ, eſse æquales; quia EY, eſt dupla ET, ergo cubus ET, erit ad cubum EY, vt 1. ad 8. & ad differentiam cuborum, vt 1. ad 7. Ergo etiam ſpatium IEI, erit ad ſpatium XEIX, vt 1. ad 7. Pariter, quia ZE, eſt ſeſquialtera EY, erit eius cubus 27; & differentia cuborum EY, EZ, 19. Ergo differentia cuborum EY, ET, erit ad differentiam cuborum EY, EZ, vt 7. ad 19. & in eadem ratione erit ſpatium XEIX, ad ſpatium QEXQ. Et eodem modo quadruplicata ET, quintuplicata &c. reperiremus ſpatium QEXQ, eſſe ad immediate maius, vt 19. ad 37. Hoc ad im-

mediate maius vt 37. ad 61. &c. Vnde diuidendo colligeremus eſſe IEI, ad exceſſum XEIX, ſupra ipſum, vt 1. ad 6. ſpatium XEIX, ad exceſſum ſpatij QEXQ, ſupra ipſum, vt 6. ad 12. QEXQ, ad exceſſum immediate ſuperioris ſupra ipſum, vt 12. ad 18. & ſic in infinitum augendo conſequens ſenario.

Sed ſupponamus QEZ, eſſe trilineum paraboliçum cubicum, & quadratum YE, duplum eſſe quadrati ET; quadratum ZE, eius triplum, &c. Quia ergo quadratum YE, duplum eſt quadrati ET, ſi ſupponamus quadratum ET, eſſe vnitatem, erit quadratum YE. 2. & quia quadratoquadratum oritur ex multiplicatione quadrati in ſe ipſum, erit quadratoquadratum EY, 4. Erit ergo quadratoquadratum YE, ad quadratoquadratum ET, vt 4. ad 1. & diuidendo, vt 3. ad 1. Erit ergo ſpatium XEIX, ad IEI, vt 3. ad 1. Item, quoniam quadratum ZE, eſt 3. & quadratoquadratum ZE, 9. erit differentia quadratoquadratorum ZE, EY, 5. Erit ergo ſpatium QEXQ, ad ſpatium XEIX, vt 5. ad 3. Quod ſi quadratum ET, intelligeretur quadruplicatum, adeo vt eius quadratoquadratum eſſet 16, & intelligerentur aucta omnia; eſſet ſpatium immediate maius, ad ſpatium QEXQ, vt 7. ad 5. & ſic in infinitum ſecundum progreſſionem numerorum imparium ab vnitate procedentium. Diuidendo ergo , erit ſpatium IEI, ad exceſſum ſpatij XEIX, ſupra ipſum, vt 1. ad 2. ſpatium vero

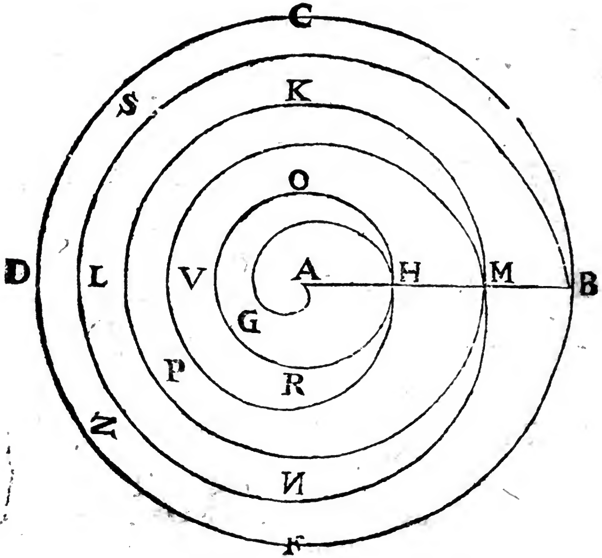
XEIX,



XEIX, erit ad exceſſum ſpatij QEXQ, ſupra ipſum, vt 3. ad 2. Ipſum vero QEXQ, ad exceſſum immediate maioris ſupra ipſum, vt 5. ad 2. & ſic in infinitum, ita vt omnia antecedentia contineant ſeriem imparium incipientium ab vnitate, conſequens verò ſit ſemper binarium.

His explicatis, ſupponamus diametrum ZE, trilinei æqualem eſſe AB, ſemidiametro circuli diagrammatis propoſit. 24. YE, in trilineo ipſi AM, in circulo, & TE, in trilineo æqualem AH, in ſpirali, & ZQ, baſim trilinei æqualem tot circumferentijs FDCB, quotus eſt numerus reuolutionum, v. g. in caſu noſtro tribus. Ergo ex propoſit.

17.



17. ſpatium in trilineo QEXQ, eſt æquale in ſpirali tertio ſpatio MNLSBM: item ſpatium XEIX, in trilineo æquale ſecundo ſpatio ſpirali HRPMH: item ſpatium in trilineo IEI, erit ex propoſit. 9. æquale primo ſpatio ſpirali AGHA. Ergo eandem proportionem habebunt ſpatia helica ad inuicem, quam habent prædicta ſpatia in trilineo. Cum ergo vniuerſaliter ſint in trilineo ſpatium primum ad ſecundum, vt poteſtas diametri ip-

ſius

ſius ſcilicet ET, vno gradu altior poteſtate trilinei; ad differentiam poteſtatum ſimilium ipſius, ET, EY, diametri ſecundi ſpatij; & vt ſecundum ſpatium ad tertium, ſic hæc differentia ad ſimilem differentiam poteſtatum EY, EZ; & ſic in infinitum: ſic in ſpirali, erit generaliter primum ſpatium ad ſecundum, vt poteſtas AH, radij primi circuli duplo gradu altior poteſtate ſpiralis (gradus enim trilinei ſuperat gradum ſpiralis vnitate) ad differentiam poteſtatum AH, radij primi circuli, & AM, radij ſecundi circuli. Secundum verò ſpatium erit ad tertium, vt dicta differentia ad ſimilem differentiam radiorum AM, AB. Et ſic in infinitum. Immo ea compendia, quæ in trilineis quadratico, & cubico collecta fuerunt, poterunt etiam colligi in ſpirali lineari, & quadratica, ſed hæc in duabus ſequentibus propoſit. colligentur ex alibi à nobis dictis.

PROPOSITIO XXVI.

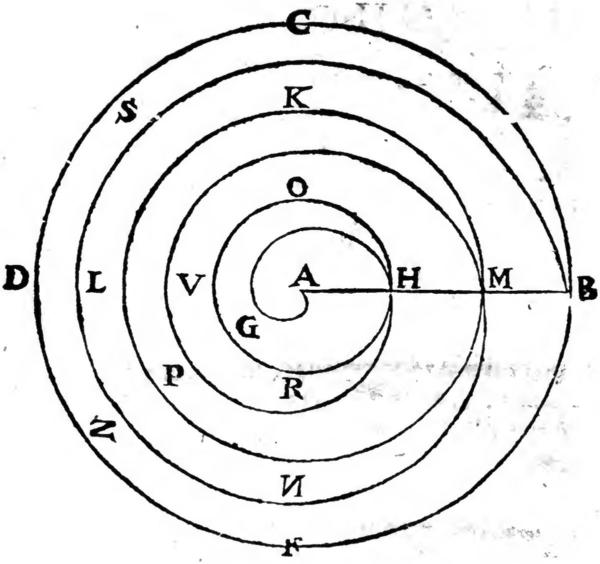
In ſpirali lineari primi circuli ſpatium helicum ad ſpatium helicum ſecundi circuli, erit vt tertia pars quadrati radij primi circuli, ad rectangulum ſub radio primi, & ſecundi circuli, vna cum tertia parte quadrati exceſſus radij ſecundi circuli ſupra radium primi. Spatium vero ſecundi circuli ad ſpatium tertium, erit vt dictum conſequens ad rectangulum ſub radio ſecundi, & tertij,

cum

cum tertia parte quadrati differentiæ horum radiorum, & ſic deinceps in reliquis.

HÆc propoſitio ijſdem terminis, & medijs probatur à Caualerio in lib. 6. Geomet. Ind. propoſit. 19. ſed nos ipſam oſtendemus ex proprijs oſtenſis. Supponamus ergo vt in propoſit. 24. eſſe ſpatia, & circulos. Dico primum ſpatium A G H, eſſe ad ſecundum ſpatium H R P M H, vt tertia pars quadrati A H, ad rectangulum M A H, cum tertia parte quadrati H M. Item ſecundum ſpatium dictum ad tertium M N Z S B M, vt rectangulum M A H, cum tertia parte quadrati H M, ad rectangulum B A M, cum tertia parte quadrati M B, & ſic in alijs. Etenim ſpatium A G H, eſt ex coroll. propoſit. 7. $\frac{1}{3}$ circuli radij A H, nempe eſt ad ipſum, vt $\frac{1}{3}$ quadrati A H, ad quadratum A H. Circulus radij A H, eſt ad circulum radij A M, vt quadratum A H, ad quadratum A M. Circulus radij A M, eſt ad ſecundum ſpatium, quod claudit, ex ſchol. 3. propoſit. 17. vt quadratum A M, ad rectangulum M A H, vna cum tertia parte quadrati H M. Ergo ex æquali, erit primum ſpatium ad ſecundum, vt $\frac{1}{3}$ quadrati A H, ad rectangulum M A H, vna cum $\frac{1}{3}$ quadrati H M. Pariter conuertendo, eſt ſecundum ſpatium ad ſecundum circulum, vt rectangulum M A H, vna cum $\frac{1}{3}$ quadrati H M, ad quadratum A M. Circulus radij A M, eſt ad circulum radij A B, vt quadratum

A M,



A M, ad quadratum A B. Circulus radij A B, eſt ex dicto ſcholio, ad tertium ſpatium, vt quadratum B A, ad rectangulum B A M, cum $\frac{1}{3}$ quadrati B M. Ergo rurſum ex æquali, erit ſecundum ſpatium ad tertium, vt rectangulum M A H, cum $\frac{1}{3}$ quadrati M H, ad rectangulum B A M, cum $\frac{1}{3}$ quadrati M B. Sic diſcurreretur in cæteris. Quare patet propoſitum.

SCHOLIVM.

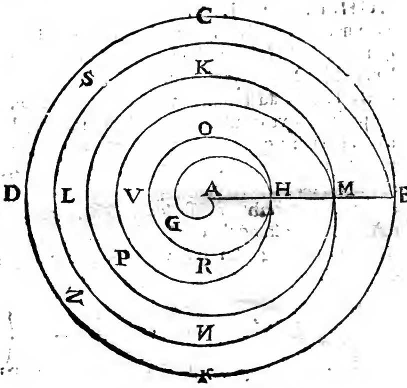
Colligemus ergo in numeris, eſſe primum ſpatium ad ſecundum, vt 1. ad 7. ſecundum ad tertium vt 7. ad 19. tertium ad quartum vt 19. ad 37. Hoc ad quintum vt 37. ad 61. & ſic diſcurrendo. Cum enim ſit primum ſpatium ad ſecundum, vt $\frac{1}{3}$ quadrati AH, ad rectangulum MAH, cum $\frac{1}{3}$ quadrati HM: ſupponamus AH, eſſe 3. Ergo MA, erit 6. quadratum AH, erit 9. eius $\frac{1}{3}$ 3. rectangulum MAH, erit 18. $\frac{1}{3}$ quadrati MH, erit 3. Ergo primum ſpatium ad ſecundum erit, vt 3. ad 21. nempe vt 1. ad 7. Item rectangulum BAM, cum ^{1} quadrati MB, erit 57. Ergo ſecundum ſpatium erit ad tertium vt 21. ad 57. nempe vt 7. ad 19. & ſic diſcurrendo in alijs. Diuidendo ergo erit primum ſpatium ad differentiam inter ipſum, & ſecundum, vt 1. ad 6. Secundum ad differentiam inter ipſum, & tertium, vt 6. ad 12. & ſic diſcurrendo augendo ſemper conſequens ſenario.

PROPOSITIO XXVII.

In ſpirali quadratica, primi circuli ſpatium helicum ad ſpatium helicum ſecundi circuli erit, vt $\frac{1}{3}$ quadrati radij primi circuli, ad rectangulum ſub hoc, & ſecundi circuli radio, vna cum $\frac{1}{3}$ quadrati differentiæ horum radiorum. Spatium verò ſecundi ad ſpatium tertij, erit vt

dictam

dictum conſequens, ad rectangulum ſub radijs ſecundi, & tertij, vna cum ⅓ quadrati differentiæ horum, & ſic deinceps in reliquis.



SVpponamus omnia, quæ in ſchemate ſuperiori, ſed ſpatia eſſe ſpiralis quadraticæ. Dico primum ſpatium ad ſecundum eſſe, vt ⅓ quadrati AH, ad rectangulum MAH, cum ⅓ quadrati HM. Secundum ad tertium, vt rectangulum

MAH, cum $\frac{1}{2}$ quadrati HM, ad rectangulum BAM, cum $\frac{1}{2}$ quadrati MB. Et ſic in reliquis. Hæc propoſitio probabitur eodem modo, quo probata fuit ſuperior, & ex ijſdem locis. Spatium enim AGH, circuli radij AH, eſt, ex coroll. propoſit. 9. : nempe eſt ad ipſum, vt $\frac{1}{2}$ quadrati AH, ad quadratum AH. Circulus radij AH, eſt ad circulum radij AM, vt quadratum AH, ad quadratum AM. Hic eſt ad ſecundum ſpatium, ex ſchol. 3. propoſit. 17. vt quadratum AM, ad rectangulum MAH, cum $\frac{1}{2}$ quadrati HM. Ergò ex æquali, erit primum ſpatium ad ſecundum, vt $\frac{1}{2}$ quadrati AH, ad rectangulum MAH, cum $\frac{1}{2}$ quadrati HM. Eodem modo demonſtrabitur eſſe ſecundum ſpatium ad tertium, vt rectangulum MAH, cum $\frac{1}{2}$ quadrati HM, ad rectangulum BAM, cum dimidio quadrati MB. Et ſic in alijs.

SCHOLIVM I.

Sed ad aſſignandas in numeris horum ſpatiorum rationes, magis inſeruiet ſequens regula. Nempe primum ſpatium, eſſe ad ſecundum, vt quadratum radij primi circuli, ad quadrata ipſius, & radij ſecundi. Secundum ad tertium, vt hæc quadrata, ad quadrata radiorum ſecundi, & tertij. Et ſic deinceps. Quod vero regula ſit vera, patet. Quia, vt dimidium ad dimidium, ſic duplum ad duplum. Duplum autem rectanguli MAH, & $\frac{1}{2}$ quadrati

MH,

MH, erunt quadrata MA, AH (Quia duo rectangula MAH, faciunt duo rectangula MHA, & duo quadrata AH; & duo rectangula MHA, cum quadratis AH, HM, faciunt quadratum MA:) & duplum rectanguli BAM, & ½ quadrati MB, faciunt quadrata BA, AM.

In numeris ergo adinueniemus, eſſe primum ſpatium ad ſecundum, vt 1. ad 3. Secundum ad tertium, vt 3. ad 5. & ſic in infinitum ſecundum progreſſionem numerorum imparium ab vnitate incluſiuè procedentium (quadrata enim AH, AM, AB, ſunt ex geneſi ſpiralium initio explicata 1. 2. 3. &c.) Diuidendo ergo erit primum ſpatium, ad differentiam inter ipſum, & ſecundum, vt 1. ad 2. Secundum ad differentiam inter ipſum, & tertium, vt 3. ad 2. & ſic infinitum.

SCHOLIVM II.

Iis expletis, quæ ad ſpatiorum helicum menſuram pertinent, in propoſit. 21. lib. 6. citat. Geom. Indi. pergit Caualerius conſiderare proportiones repertas inter cylindros, cylindricos, & conicos ſuper circulis, & ſpatijs ſpiralibus exiſtentes. Non ergo rem ingratam lectori fore arbitramur, ſi & nos in ſpatijs infinitarum ſpiralium exequemur illud idem, quod Caualerius in ſpatijs vnius dumtaxat linearis ſpiralis adimpleuit. Sed antequam hoc aggrediamur debemus ſupponere illud idem, quod ipſemet in dicta

pro-

propoſit. 21. ex ſparſim probatis in ſua geometria, deducit. Nimirum. *Quod ſi exponatur ſeries ſpiralium, & circulorum deinceps à primis, in ſpatijs verò ſub ſpiralibus, & volutis, cylindrici, & conici in eadem altitudine ſtantes intelligantur conſtituti tamquam in baſibus, ſimiliter & in circulis conſtituti eſſe cylindrici, & coni intelligantur: cylindri inter ſe, & cylindrici pariter inter ſe, ſiue ad cylindros comparati, ſiue coni inter ſe, & conici inter ſe, ſiue ad conos comparati eandem rationem, quam baſes habebunt.* Huiuſce aſſerti ſubiungit Caualerius probationem inquiens. *Patet hæc propoſitio, nam cylindrici, & conici in eadem altitudine conſtituti ſunt inter ſe, vt baſes: ſunt autem prædicta ſolida per conſtructionem in eadem altitudine poſita, ergo erunt inter ſe, vt ipſæ baſes; Vocentur autem cylindri, & cylindrici, nec non conici eiuſdem numeri cum ſpatijs, quibus inſiſtunt, ideſt primus cylindrus, vel conus, qui eſt in primo circulo, ſecundus cylindrus, vel conus, qui eſt in ſecundo circulo tamquam in baſi; primus cylindricus, vel conicus, qui eſt in ſpatio helico primi circuli tamquam in baſi, ſecundus cylindricus, vel conicus, qui eſt in ſpatio ſecundi circuli, & ſic deinceps.* Hæc Caualerius. Quibus conſequenter ad noſtram doctrinam addendum videtur, non ſolum cylindros, conos, cylindricos, conicos, primos, ſecundos, tertios, &c. fore nuncupandos ſecundum numerum, a quo denominantur circuli, & ſpatia ſuper quibus inſiſtunt, ſed etiam primi, ſecundi, tertij gradus, &c. ſecundum quod ſpatia ipſamet ſunt vel linearia, vel quadratica, vel cubica, &c. His explicatis ſit.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

Primus cylindricus ad primum conicum cuiuſcunque gradus eſt, vt triplus numerus ſpiralis ſenario auctus, ad numerum ſpiralis.

ESto in ſchem. ſpiralium, ſpatium primum helicum AGH, cum ſibi circumſcripto primo circulo radij AH, & ſuper circulo intelligamus cylindrum, ſuper vero ſpatio ſpirali conicum eiuſdem altitudinis cum cylindro. Dico cylindrum eſſe ad conicum, vt triplus numerus gradus ſpiralis ſenario auctus, ad numerum ſpiralis. V. g. in lineari, vt 9. ad 1. In quadratica, vt 12. ad 2. In cubica, vt 15. ad 3. & ſic in infinitum, augendo ſemper antecedens ternario, conſequens vero vnitate.

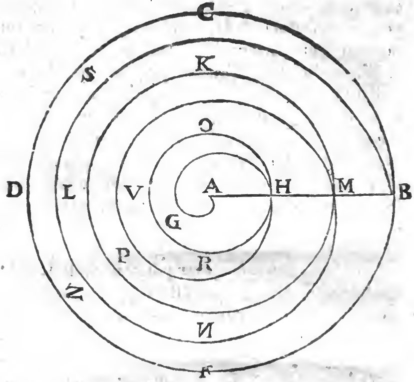
Nam, ex coroll. propoſit. 9. cylindrus ſuper circulo, ad cylindricum ſuper ſpatio eiuſdem altitudinis (quia ſunt vt baſes) eſt, vt numerus gradus ſpiralis binario auctus, ad numerum; nempe vt triplus ad triplum; ſcilicet vt triplus numerus ſenario auctus ad triplum numerum. Ergo erit ad conicum $\frac{1}{3}$ cylindrici, vt triplus numerus ſenario auctus, ad numerum. Quod erat oſtendendum.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Cylindrus ſuper circulo, ad conicum eiuſdem altitudinis cum ipſo exiſtentem ſuper quolibet aliorum ſpatiorum à primo cuiuſcunque gradus, quod comprehendit. Erit vel vt factum ſub triplo quadrato radij ipſius in differentiam poteſtatum ipſius, & radij circuli vnitate minoris: vel vt factum ſub quadrato ipſius, & ſub tripla differentia dicta, ad partem differentiæ poteſtatum radij ipſius, & circuli vnitate minoris duplici gradu altiorum poteſtate ſpiralis, ſe habentem ad ipſam, vt numerus gradus ſpiralis, ad numerum binario auctum.

ESto in ſchemat. eodem quilibet circulus radij AB, circumſcriptus cuilibet ſpatio MZSBM, cuiuſcunque numeri à primo, & cuiuſcunque gradus, & eſto AM, radius circuli vnius numeri inferioris. Dico cylindrum ſuper circulo radij AB, eſſe ad conicum eiuſdem altitudinis exiſtentem ſuper ſpatio MNZSBM, vel vt factum ſub triplo quadrato AB, & ſub differentia poteſtatum BA, AM, eiuſdem gradus cum ſpirali: vel vt factum ſub quadrato AB, & ſub tripla dicta differentia, ad partem differentiæ poteſtatum BA, AM, duplici gradu altiorum poteſtate gradus ſpiralis ſe habentem ad differentiam, vt numerus ſpiralis, ad numerum binario auctum. V.g. in ſpirali lineari, erit cylindrus ad conicum, vel vt factum ſub quadrato triplo

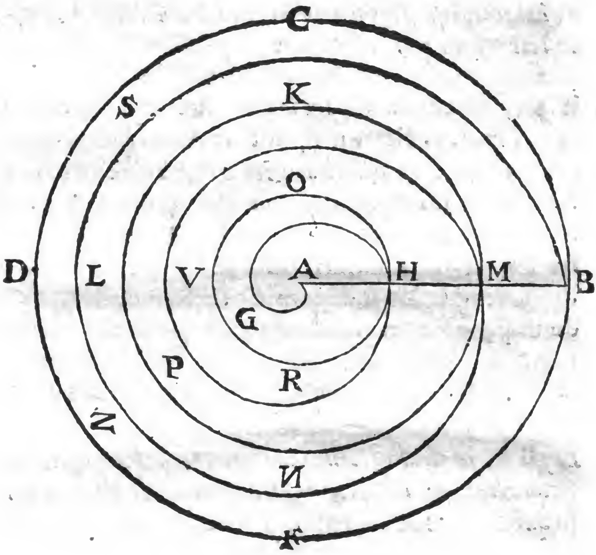


AB, in BM: vel vt factum ſub quadrato AB, in triplam BM, ad $\frac{1}{3}$ differentiæ cuborum AB, AM. In quadratica vero erit, vel vt factum ſub quadrato triplo AB, in differentiam quadratorum AB, AM: vel vt factum ſub quadrato AB, in triplam differentiam quadratorum AB, AM, ad $\frac{1}{4}$ differentiæ quadratoquadratorum AB, AM. Et ſic in aliis.

Quoniam enim ex ſchol. 2. propoſit. 17. circulus

O radij

SCHOLIVM.



Verum, quoniam in ſpiralibus lineari, & quadratica aſſignatæ fuerunt peculiares rationes ad ſpatia; hinc eſt quod pro ipſis tradendæ ſunt duæ particulares propoſitiones.

PROPOSITIO XXX.

In ſpirali lineari, erit cylindrus ad conicum ut in antecedenti propoſitione, vt triplum quadratum radij B A, ad rectangulum B A M, cum $\frac{1}{2}$ *quadrati B M.*

PRopoſitio hæc patebit faciliter, quia cum ex ſchol. 3. citat. propoſit. 17. ſit etiam circulus ad ſpatium, vt quadratum B A, ad rectangulum B A M, cum $\frac{1}{3}$ quadrati B M; vel vt triplum, ad triplum; nempe vt triplum quadratum B A, ad triplum rectangulum B A M, cum quadrato B M: diſcurrendo ad modum propoſit. anteced. concludetur propoſitum.

PROPOSITIO XXXI.

In ſpirali quadratica, erit cylindrus ad conicum, vt triplum quadratum B A, ad rectangulum B A M, cum $\frac{1}{2}$ *quadrati B M.*

PRopoſitio patebit ex eodem ſcholio cit. diſcurrendo ſuperiorum ad inſtar.

SCHOLIVM.

Poſſet forſitan lector in operibus eximij Torricellij verſatus cogitare, analogiam, quam ipſemet aſſignauit

gnauit in propoſitione 17. de demen. parabolæ, inter parabolam quadraticam, & ſpiralem linearem, extendi, ſuo modo, ad infinitas parabolas, & ad infinitas ſpirales. Quia verò etiam nos hanc rem aliquando contemplati fuimus, & agnouimus huiuſce aſſerti falſitem; ideo determinauimus in hac materia quid nobis occurrerit, manifeſtare.

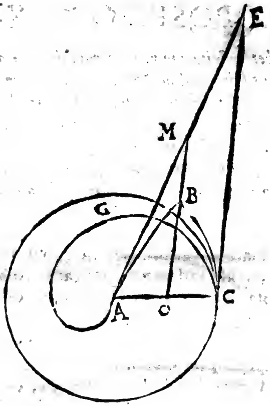
Torricellius ergo in loco citato, ſupponens AC, in diagram. ſequent. eſſe radium primi circuli circumſcripti primo ſpatio ſpirali AGCA; ABC, eſſe parabolam quadraticam cuius baſis eadem AC, diameter OB; AE, eſſe ipſam parabolam tangentem; & CE, eſſe parallelam OB: probauit exceſſum trianguli AEC, ſuper parabola ABC, æqualem eſſe exceſſui circuli ſuper ſpatio; & conſequenter parabolam ABC, æqualem fore ſpatio AGCA. Quod quomodocunque probet Torricellius, ipſum ſic oſtendemus. OB, occurrat AE, in M. Ergo ex propoſit. 33. prim. conic. MO, erit dupla BO: & conſequenter EC, dupla MO, erit quadrupla BO. Cum ergo parallelogrammum duplum trianguli AEC, eſſet quadruplum parallelogrammi circumſcripti parabolæ; erit triangulum AEC, parallelogrammi circumſcripti parabolæ duplum; nempe erit ad ipſum, vt 6. ad 3. Sed cum ex quadratura parabolæ quadraticæ ab innumeris propemodum aſſignata, & etiam à nobis nouiter duobus modis in miſcellaneo noſtro hyperbolico, & parabolico, in ſchol. 1. propoſit. 26. & in ſchol. 1.

pro-

propoſit. 28. ſit parallelogrammum parabolæ circumſcriptum ad ipſam, vt 3. ad 2. Ergo etiam triangulum A E C, erit ad parabolam A B C, ex æquali, vt 6. ad 2. ſeù, vt 3. ad 1: & ad exceſſum ipſius ſupra parabolam, vt 3. ad 2. Quæ rationes ſunt illæ, quas habet circulus ad exceſſum, & ad ſpatium ſpirale, vt apparet ex propoſit. 9. & ex eius corollario.

Poſſet ergo quiſpiam ex his cogitare, analogiam præſentem perpetuam eſſe in alijs ſpiralibus, & in alijs parabolis, ita vt ſecundum ſpatium ſpirale, nempe quadraticum, & exceſſus quadraticus, ſint æquales parabolæ cubicæ, & exceſſui trianguli A E C, ſupra ipſam: & ſic deinceps. Sed qui hoc arbitraretur oſtendere, deciperetur vtique, quia hoc falſum eſſe in poſterum manifeſtabimus. Sed vt lector percipiat, quæ dicturi ſumus, debet quandam doctrinam à propoſit. 50. citati miſcellanei petere, in qua demonſtrauimus. Quod. Si in qualibet infinitorum parabolarum ſumatur aliquod punctum, à quo ad diametrum recta ordinatim applicetur, diameterque ità producatur, vt pars extra parabolam ſit ad partem diametri abſciſſam ab ordinatim applicata verſus verticem, vt numerus parabolæ vnitate minutus ad vnitatem. Recta linea, quæ ab extremitate inuentæ lineæ ducitur ad illud punctum, quod ſumptum fuerat, parabolam continget. Quæ omnia nil aliud ſonant, niſi quod ſi A E, contingat parabolam quadraticam, M O, erit dupla O B: Si cu-

bicam,



bicam, erit MO, tripla OB: ſi quadratoquadraticam, triplam: & ſic deinceps. Vt MO, ſit ad OB, vt numerus parabolæ ad vnitatem. Hæc in dicta propoſit. probantur: videat ipſa lector in dicto loco. Sed ex his erit nobis,

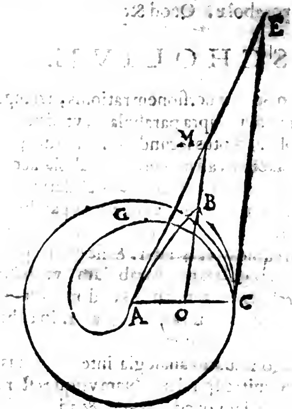
PRO-

PROPOSITIO XXXII.

Si in qualibet infinitarum parabolarum ducatur ordinatim applicata ad diametrum, & ab vna extremitate ordinatim applicatæ ducatur tangens parabolam, ab altera verò extremitate ducatur parallela diametro. Triangulum ab his, & ab ordinatim applicata formatum, erit ad parabolam, vt numerus parabolæ acceptus ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad numerum parabolæ.

IN ſchemate ſuperiori eſto quælibet parabola ABC, cuius ordinatim applicata ad diametrum OB, ſit ipſa AC, AE, ſit tangens, & CE, ſit parallela diametro OB. Dico triangulum AEC, eſſe ad parabolam ABC, vt numerus parabolæ acceptus ſecundum numerum vnitate auctum, ad numerum. V.g. in parabola quadratica, vt 6. ad 2. ſeù, vt 3. ad 1. In cubica, vt 12. ad 3. ſeù vt 4. ad 1. & ſic in infinitum. Occurrat OB, ipſi AE, in M. Ergo ex citata propoſit. 50. Miſcellanei hyperbolici, & parabolici, erit MO, ad OB, vt numerus parabolæ ad vnitatem. Ergo CE, dupla MO, erit ad BO, vt duplus numerus parabolæ ad vnitatem. Ergo triangulum AEC, erit ad parallelogrammum circumſcriptum parabolæ ABC, vt numerus parabolæ ad vnitatem; nempe, vt numerus parabolæ acceptus ſecundum numerum vnitate

auctum



auctum, ad numerum vnitate auctum: Sed ex quadratura infinitarum parabolarum aſſignata ex Caualerio in propoſit. 1. lib. 1. de infinit. parab. eſt parallelogrammum circumſcriptum parabolæ ad ipſam, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ. Ergo ex æquali, erit triangulum A E C, ad parabolam A B C, vt numerus parabolæ acceptus

P ſecun-

ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum ad numerum parabolæ. Quod &c.

SCHOLIVM.

Erit ergo per conuerſionem rationis, triangulum ad exceſſum ipſius ſupra parabolam, vt dictus numerus parabolæ acceptus ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad numerum parabolæ acceptum ſecundum numerum parabolæ. Vel clarius, erit triangulum ad parabolam, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad vnitatem; nempe in quadratica, vt 3. ad 1. in cubica, vt 4. ad 1. & ſic deinceps. Et ad exceſſum trianguli ſupra parabolam, vt dictus numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ. Nempe in quadratica, vt 3. ad 2. In cubica, vt 4. ad 3. Et ſic in infinitum.

Non ergo ſeruatur analogia inter infinitas parabolas, & infinitas ſpirales. Nam vtique eſt triangulum ad parabolam quadraticam, & ad exceſſum ipſius ſupra parabolam, vt primus circulus circumſcriptus ſpatio ſpirali lineari ad ipſum ſpatium, & ad exceſſum ſupra ipſum; at non ſic eſt in alijs: ſed in ſpirali quadratica, eſt ex propoſit. 9. & ex eius corollario, circulus ad ſpatium, vt 4. ad 2. & non, vt 4. ad 1. vt triangulum ad trilineum cubicum; & ſic in alijs.

Sed vnum adnimaduertetur, quod equidem haud ſpernendum videtur, & eſt, quod in eadem ratione

ſunt

ſunt in qualibet parabola, triangulum A E C, ad parabolam A B C, & parallelogrammum ſemiparabolæ O B C, circumſcriptum ad trilineum, quod eſt exceſſus parallelogrammi ſupra ſemiparabolam. Nam vtrumque eſt ad vtrumque, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ. Pariter in eadem ratione ſunt triangulum A E C, ad exceſſum ſui ſupra parabolam, & parallelogrammum ſemiparabolæ circumſcriptum ad ipſam; nempe, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum.

DIGRESSIO.

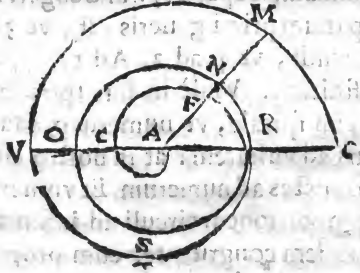
Dum hæc, quæ ſcripſimus ſub prælo eſſent, accepimus epiſtolas à nobiliſſimo Geometra Petro Parelo Carauaggio Mediolanenſi, ac Mediolani commorante, ad nos traſmiſſas, datas ſub die 21. Iulij anni præſentis 1660. in quibus (prius à nobis de ſubiecto noſtræ impreſſionis monitus) ſic loquebatur. *Vedo per la ſua, che pone al Torchio vn' opera delle infinite ſpirali. Io credo, che V. R. hauerà notitia delle opere de Gio: Valliſio ſtampate in Oxonio, che argomenta con il methodo de gl' infiniti, e parla delle ſpirali.* **His auditis, cogitabamus Vualliſium nobis præiuiſſe, ac opuſculum noſtrum de Infinitis ſpiralibus ad oleum, piperque demittendum. Porrò libro Vualliſij fruſtra apud bibliopolas, aut alios Venetijs quæſito, confugimus ad Excellentiſſimum Andream Morettum Patauij tunc manentem, ipſum rogantes, opus prædictum, ſi**

apud ipſum eſſet, nobis accommodare. Nec euanuit ſpes noſtra. Ille etenim Excellentiſſimus vir ſumma, qua pollet humanitate, vota noſtra expleuit, librumque ab ipſo mutuo recepimus. Quo vix inſpecto, ſtatim occurrit nobis tractatus de ſectionibus conicis, &c. protinuſque obſeruauimus in ipſa dedicatione afferri validiſſimum teſtimonium pro indiuiſibilibus. Ita namque ait. *Opus ipſum quod attinet, videbitis me ſtatim ab initio Cauallerij Methodum indiuiſibilium, quaſi iam à Geometris paſſim receptam tam huic, quam tractatui ſequenti (qui huic gemellus eſt) ſubſternere &c.* Audi Tacquet, & amplius noli de indiuiſibilibus iudicare. Methodus namque illa indiuiſibilium, *quam pro legitima, ac geometrica admittendam non exiſtimas*, à geometris paſſim recipitur. Deſine quæſo, adducendo argumentationis per indiuiſibilia exemplum, exclamare. *Quem conuincat iſthæc ratiocinatio*. Nam iuxta Vualliſium (qui pluribus in locis perhonorifice de indiuiſibilibus loquitur) conuincit paſſim geometras.

Opus ergo Vualliſij percurrentes, animaduertimus ipſum anno 1656. circa aliquot laboraſſe, circa quæ Caualerius in exercitationibus geometricis 1647. & nos in opere de infinitis parabolis anno 1659. Sed non pœnituit illa, quamuis ipſo poſteriores, euulgaſſe: namque procedimus methodo à ſua totaliter diuerſa; & iuxta nobis connaturale, geometrica geometricè pertractauimus.

Porrò valde gauiſi ſumus dum inſpeximus, infinitas

nitas ſpirales ab illo acutiſſimo viro explanatas, diuerſiſſimas fore toto cælo ab ijs, quas nos meditati eramus. In ſcholio etenim ſubnexo propoſit. 45. Arithmeticæ infinitorum, in quo ſuas infinitas ſpirales explicat, ſupponit ipſas diuerſificari ex diuerſa proportione in ſpirales incidentium ab initio ad inuicem ſecundum multiplicatam proportionem angulorum. V. g. in ſchem. ſequenti, ſi F A, incidens in ſpiralem ſit ad A C, itidem in ſpiralem incidentem, vt angulus N O R A, ad angulum O S R A; nempe vt arcus N O S R, ad arcum O S R; Secundum ipſum, ſpatium A C F R A, eſt primum ſpatium ſpirale. Si vero ſit F A, ad A C, in duplicata proportione prædicti anguli ad prædictum angulum, ſeu dicti arcus ad dictum arcum. Spatium erit ſecundum. Si in triplicata, tertium, &c. At in noſtris ſpiralibus res è contra accidit.



dit.

dit. Nam incidens ad incidentem eſt in ſubmultiplici proportione anguli ad angulum, ſeù arcus ad arcum. In ſpirali etenim quadratica, cum ex propoſit. prim. ſit quadratum FA, ad quadratum AC, vt arcus NOSR, ad arcum OSR, erit FA, ad AC, in ſubduplicata proportione arcus ad arcum. Et ſic conſequenter in cubica, in ſubtriplicata, & ſic deinceps. Procedentes ergo per diuerſa principia, & circa diuerſiſſima laborantes, diuerſiſſima etiam colligimus. Ipſe etenim putans incidentes in ſpiralem augeri ſecundum multiplicem proportionem angulorum, ſeù arcuum, arguendo ſuo modo colligit ſpatia ſpiralia minui. Secundum enim ipſum, circulus circumſcriptus primo ſpatio, ſeù primi generis eſt ad ipſum, vt 3. ad 1. Ad ſpatium ſecundi generis, vt 4. ad 1. Ad tertij, vt 5. ad 1. & ſic in infinitum. Nos vero ſupponentes incidentes in ſpirales augeri in ſubmultiplici proportione angulorum, ſeù arcuum, deduximus ſpatia ſpiralia augeri. Circulus enim ad ſpatium primi generis eſt, vt 3. ad 1. Ad ſpatium ſecundi, vt 4. ad 2. Ad tertij, vt 5. ad 3. & ſic in infinitum. Vndè in ſuis ſpiralibus circulus eſt ad ſpatium ſpirale, vt numerus gradus ſpatij binario auctus ad vnitatem: at in noſtro eſt, vt numerus binario auctus ad numerum. Et vniuerſaliter ipſe exiſtimat proportionem circuli ad infinita ſpatia ſpiralia eſſe eandem congruenter cum proportione parallelogrammi ad infinita triſinea parabolica ſibi inſcripta. At nos in noſtris ſpiralibus infinitis adinuenimus,

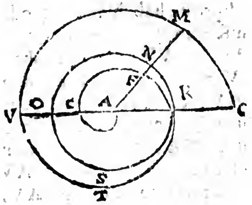
uenimus, proportionem circuli ad eadem infinita ſpatia (ſubintellige ſemper primæ reuolutionis) eſſe eandem cum congruenti, & explicata proportione trianguli ad exceſſus ſupra infinita trilinea parabolica ſibi inſcripta. Quæ proportiones in ſpirali Archimedea dumtaxat conueniunt. In ipſa etenim ſolummodo, tam parallelogrammum ad trilineum, quam triangulum parallelogrammi dimidium ad exceſſum ipſius ſupra trilineum, ſunt vt 3. ad 1. In reliquis vero, parallelogrammum eſt ad trilineum, vt numerus trilinei vnitate auctus ad vnitatem: triangulum vero eſt ad exceſſum ſui ſupra trilineum, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad numerum trilinei vnitate minutum. Cum ergo infinitæ ſpirales Clariſſimi Vualliſij ſic diſcrepent à noſtris, prodeant etiam hæ.

Porrò quis recolens dicta in præſenti digreſſione, & modum ſupra explicatum, quo Clariſſimus Torricellius conſiderauit analogiam inter ſpiralem linearem, & parabolam quadraticam, poſſet rationabilius, quam ibidem factum fuit, cogitare, analogiam illam, quam ſupra diximus nequaquam ſeruari inter infinitas ſpirales, & infinitas parabolas, vtique locum habere in infinitis parabolis, & in infinitis ſpiralibus Vualliſij. Nam ex ſupra dictis, patet, in his omnibus eaſdem proportiones ſeruari. Ex ſtatim enim ſupra dictis liquet, circulum ad infinitas ſpirales Vualliſij eſſe ſecundum ipſum, vt numerus gradus ſpiralis binario auctus, ad vnitatem: & ad exceſſum

ceſſum ipſius ſupra ſpatia, vt numerus binario auctus ad numerum vnitate auctum. Ex dictis vero in ſchol. propoſit. 32. conſtat in ſchem. illius, eſſe triangulum A E C, ad parabolam A B C, vt numerus parabolæ vnitate auctus (nempe, vt numerus ſpiralis binario auctus) ad vnitatem: & ad exceſſum ipſius ſupra parabolam, vt numerus vnitate auctus, ad numerum. Eaſdem ergo proportiones habent triangulum ad exceſſum, & ad parabolam, & circulus ad exceſſum, & ad ſpatium. Sicuti ergo, poſſet quis dicere, Torricellius patefecit ſimiles analogias inter triangulum A E C, & exceſſum ipſius ſuper parabola quadratica A B C, & inter circulum, & exceſſum ipſius ſupra ſpatium ſpirale lineare A G C, ſic forſitan ſeruabitur ſimilis analogia inter alias explicatas figuras. Sed ſimiles diſcurſus erronei ſunt cenſendi, vt infra manifeſtabimus.

Sed prius Vualliſij infinitæ ſpirales, earumque geneſis clarius ſunt explicandæ, diſcrimenque inter noſtras, & ſuas dilucidius eſt aſſignandum. Diximus initio operis, ſpirales noſtras generari ex duplici motu eodem tempore peracto, nempe in ſchemate ſequenti, puncti A, æquabiliter ſemper lati per ſemidiametrum A R; & ſemidiametri A R, circa centrum A, puncto R, deſcribentis peripheriam vel æquabiliter, vel ita vt circumferentia peracta ad circumferentiam, vel angulus ad angulum eſſet, vt variæ temporum poteſtates ad inuicem. Hinc oriebatur, quod A C, A F, in ſpiralem incidentes

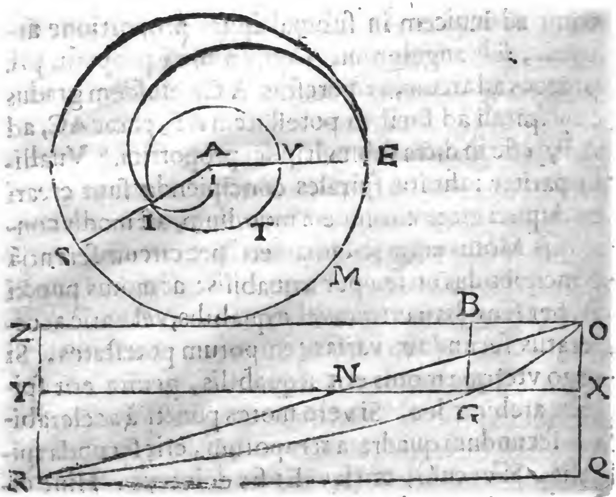
erant



erant ad inuicem in ſubmultiplici proportione arcuum, ſeù angulorum. Cum enim ex propoſit. pri. ſit arcus ad arcum, vt poteſtas AC, eiuſdem gradus cum ſpirali ad ſimilem poteſtatem AF; patet AC, ad AF, eſſe in dicta ſubmultiplici proportione. Vuallisij pariter infinitæ ſpirales concipiendæ ſunt creari ex duplici motu eorundem mobilium, aſt modis contrarijs. Motus enim ſemidiametri per circumferentiã concipiendus eſt ſemper æquabilis: at motus puncti A, per ſemidiametrum, vel æquabilis, vel variè accelератus ſecundum varias temporum poteſtates. Si ergo vterque motus erit æquabilis, genita erit ſpiralis archimedea. Si vero motus puncti à acclerabitur ſecundum quadrata temporum, erit ſecunda ſpiralis. Si vt cubi, tertia. Et ſic deinceps. Hinc ergo fiet, AC, ad AF, eſſe in multiplici propor-

tione arcus ad arcum; ſeù anguli, ad angulum, vt ait Vuallisius.

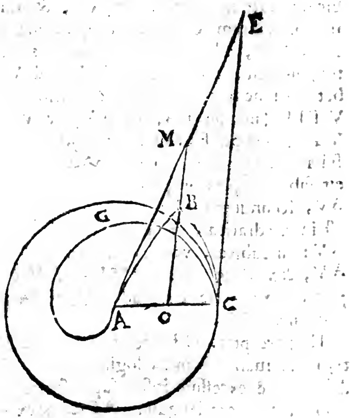
Ex hac doctrina habebimus, quod in ſchemat. ſeq. circumſcripto ſpirali circulo, & ſemidiametro AV, ducto arcu VTI. Erit peripheria EMSE, ad arcum VTI, in ratione compoſita ex ratione AE, ad AV, & ex ratione vel AE, ad AV, in ſpirali lineari; vel minoris mediarum extremarum continuè inter EA, AV, quarum numerus ſit vnitate minor numero ſpiralis, ad AV. V. g. in quadratica, ex ratione AE, ad AV, & mediæ



pro-

proportionalis inter A E, A V, ad A V. In cubica, ex rationibus A E, ad A V, & minoris duarum mediarum continuè proportionalium inter A E, A V, ad A V; & ſic deinceps. Qùod patet, quia circumferentia E M S E, ad V T I, habet rationem compoſitam ex ratione ipſius ad V T I V (nempe E A, ad A V) & V T I V, ad V T I; nempe E M S E, ad E M S. Sed in alijs ſpiralibus à lineari proportio E M S E, ad E M S, eſt ſub multiplex proportionis E A, ad A I, ſeù A V, ſecundum explicatum gradum ſpiralis: vnde eſt in quadratica, vt media inter E A, A V, ad A V: in cubica, vt minor duarum mediarum ad A V, &c. Ergo ratio E M S E, ad V T I, componetur ex ratione E A, ad A V, & dictarum mediarum ad A V.

His perceptis. Oſtendemus in ſchemate ſequenti, non ſeruari dictam analogiam inter circulum radij A C, & exceſſum ipſius ſupra ſpatium ſpirale A G C, & inter triangulum A E C, & exceſſum ipſius ſupra parabolam A B C. Hoc autem oſtendemus in ſpirali quadratica, & parabola cubica. Nam ſi dicta analogia curreret, mente centro A, interuallo A O, intellecta peripheria, eſſet C E, ad M B, vt circumferentia radij A C, ad circumferentiam deſcriptam in ipſo exceſſu contentam inter O, & punctum in ſpirali. Sed ratio circumferentiæ radij A C, ad dictam circumferentiam componitur ex ratione C A, ad A O, & mediæ proportionalis



inter CA, AO, ad ipſam AO. Ergo etiam ratio CE, ad MB, ex ijſdem componeretur rationibus. Porrò ratio CE, ad MB (de foris ſumpta MO,) componitur quoque ex rationibus CE, ad OM, & huius ad MB: & vt CA, ad AO, ſic CE, ad OM. Ergo OM, ad MB, eſſet, vt media proportionalis inter CA, AO, ad AO.

Quod

Quod vtique eſt falſiſſimum. Nam OM, ad MB, eſt ex citat. prop. 50. Miſcel. hyperb. &c. vt 3. ad 2: inter autem CA, duplam AO, & AO, nempe inter 4. & 2. non eſt 3. medium proportionale. Non ergo ſeruatur dicta analogia: & tamen ſi vera ſunt, quæ Vuallisius ſcripſit (nobis enim diuerſa methodo à ſua adhuc non conſtat) eſt ſemper eadem proportio.

In præſenti ergo opuſculo comprehenſa, ſunt ea, quæ quintò tibi proponimus, benigne lector, percurrenda. In quatuor primis noſtris operibus antea elaboratis quamplurimos, progreſſu temporis, errores animaduertimus: non paucis etiam præſens eſt aſperſum. Aſt nec illi, nec iſti, vt plurimum, materiam labefactant, nec ſenſum præcipuè intentum euertunt, adeovt lectori hærendum ſit in aſſertorum intelligentia. Errores verſantur ſæpe ſæpius vel in locutione latina, vel in alijs rebus non magni momenti. Hos errores dona nobis quæſo, benigne lector. Nec putamus te experiri inclementem, præcipuè ſi in typographijs aliquando te exercueris. Crede nobis, ingens tormentum authores exagitat in ipſa impreſſione; & plus laboris adinuenitur in hac, quam in compoſitione ipſamet, in rebus geometricis præſertim. Oſcitantia etenim, improbitas, & imperitia artificum ſic torquent, & angunt authores, vt non paucis vicibus cogitent momento diſperdere, quæ tempore prolixo, & magnis laboribus collegerunt. Porrò omnia hæc, & alia innumera ab impreſ-

preſſione ſunt inſeparabilia. Suſtine ergo clementer, benigne lector, errores eos, quibus noſtra opuſcula apparent conſpurcata: & ſicuti, fauente Deo, potes à nobis alia rationabiliter in poſterum, immo quamprimum exſpectare; ità nimis à ſcopo aberrares, ſi ea abſque erroribus proſilij e, cogitares. Vale.

FINIS.

VITTORIO EMANUELE BIBLIOTECA IN ROMA

Digitized by Google